

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

PGCD, théorème de Bézout
et théorème de Gauss

Le 29 janvier 2008

Exercice 1

Partie A : Question de cours

1) **Théorème de Bézout** : Deux entiers a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Théorème de Gauss : Soit a , b et c trois entiers naturels non nuls. Si a divise le produit bc et s'il est premier avec b , alors il divise c .

2) Comme a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$. En multipliant l'égalité précédente par c , on obtient : $cau + cbv = c$.

Or a divise bc , il existe alors un entier q tel que $bc = aq$.

D'où $cau + cbv = c$ implique que $cau + aqv = c$, c'est-à-dire $a(cu + qv) = c$.

Comme $cu + qv$ est un entier, on en déduit que a divise c .

Partie B

1) Comme 12 et 19 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.

$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$. Or $12v = 1 - 19u$, d'où $N = 13 \times (1 - 19u) + 6 \times 19u = 13 - 7 \times 19u$; par suite, $N \equiv 13 \pmod{19}$.

De plus, $19u = 1 - 12v$, d'où $N = 13 \times 12v + 6 \times (1 - 12v) = 6 + 7 \times 12v$; par suite, $N \equiv 6 \pmod{12}$.

Par conséquent, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S) .

2) a) Soit n_0 une solution de (S) , alors $\begin{cases} n_0 \equiv 13 \pmod{19} \\ n_0 \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} n_0 = 13 + 9k_0 \\ n_0 = 6 + 12k'_0 \end{cases}$, avec

k_0 et k'_0 des entiers.

De même, $\begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 13 + 19k \\ n = 6 + 12k' \end{cases}$, avec k et k' des entiers.

En soustrayant ligne à ligne les deux systèmes, on obtient : $\begin{cases} n - n_0 = 19(k - k_0) \\ n - n_0 = 12(k' - k'_0) \end{cases}$, ce qui équivaut

à $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$.

Par conséquent, soit n_0 une solution de (S) , (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$.

b) Si $n \equiv n_0 \pmod{19}$, alors 19 divise $n - n_0$; de même, si $n \equiv n_0 \pmod{12}$, alors 12 divise $n - n_0$. Comme 12 et 19 sont premiers entre eux, alors 12×19 divise $n - n_0$, ce qui équivaut à

$$n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}.$$

Par conséquent, $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$.

3) a) Par la méthode l'algorithme d'Euclide, on obtient :

a	b	reste
19	12	7
12	7	5
7	5	2
5	2	1
2	1	0

En remontant, on a :

$$1 = 5 - 2 \times 2.$$

Or $2 = 7 - 5$; alors :

$$1 = 5 - 2 \times (7 - 5) = 3 \times 5 - 2 \times 7.$$

Or $5 = 12 - 7$; alors :

$$1 = 3 \times (12 - 7) - 2 \times 7 = 3 \times 12 - 5 \times 7.$$

Or $7 = 19 - 12$; alors :

$$1 = 3 \times 12 - 5 \times (19 - 12) = 8 \times 12 - 5 \times 19.$$

Par conséquent, **le couple $(-5 \quad 8)$ est un couple solution de l'équation $19u + 12v = 1$.**

Dans ce cas, **la valeur de N correspondante est : $N = 13 \times 12 \times 8 + 6 \times 19 \times (-5) = 678$.**

b) D'après les questions 2) a) et 2) b), les solutions n du système (S) sont telles que $n \equiv n_0 \pmod{19 \times 12}$ où n_0 est une solution de (S), par exemple 678.

Or $n \equiv 678 \pmod{12 \times 19} \equiv 678 \pmod{228} \equiv 222 \pmod{228}$.

Par conséquent, **l'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble des entiers n tels que $n \equiv 222 \pmod{228}$.**

4) Trouver un entier naturel n tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13, revient à résoudre le système (S).

D'après la question précédente, cet entier n est de la forme $n \equiv 222 \pmod{228}$.

Par conséquent, **le reste de la division de cet entier par 228 est 222.**

Exercice 2

Soit d le PGCD de x et y .

Alors d divise x et divise y , d'où d divise $x + y$, c'est-à-dire d divise 27.

De plus, d divise le PPCM de x et y . Donc d divise 60.

Par suite, d est un diviseur commun de 27 et de 60 ; par conséquent, d est égal à 1 ou à 3.

• Supposons que $d = 1$; alors $xy = \text{PGCD}(x ; y) \times \text{PPCM}(x ; y)$, c'est-à-dire $xy = 1 \times 60 = 60$.

On en déduit que x et y sont des diviseurs de 60 dont la somme est égale à 27 et le produit à 60.

Or l'ensemble des diviseurs de 60 est $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60\}$.

Il n'y a donc dans cas aucun couple solution de ce système.

• Supposons que $d = 3$; alors $xy = \text{PGCD}(x ; y) \times \text{PPCM}(x ; y)$, c'est-à-dire $xy = 3 \times 60 = 180$.

On en déduit que x et y sont des diviseurs de 60 dont la somme est égale à 27 et le produit à 180.

Or l'ensemble des diviseurs de 60 est $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60\}$.

Donc, les couples $(12 ; 15)$ et $(15 ; 12)$ sont solutions de ce système.

Par conséquent, **les couples $(x ; y)$ d'entiers naturels tels que**
$$\begin{cases} x + y = 27 \\ \text{PPCM}(x ; y) = 60 \end{cases}$$
 sont :
 $(12 ; 15)$ et $(15 ; 12)$.