

DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Similitudes

Le 25 mars 2008

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Le plan complexe \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par s l'application qui à tout point M de \mathcal{P} de coordonnées $(x ; y)$ associe le

point M' de coordonnées $(x' ; y')$ tel que :
$$\begin{cases} x' = -x - y + 2 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M .
- 2) Démontrer que s est une similitude plane directe. Préciser son angle, son rapport et son centre \mathcal{I} .

Exercice 2

Le plan complexe \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On prendra 1 cm pour unité graphique. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 2 + i$, $z_B = 1 + 2i$, $z_C = 6 + 3i$ et $z_D = -1 + 6i$.

- 1) Représenter les points A, B, C et D .
- 2) a) Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que : $f(A) = B$ et $f(C) = D$.
b) Montrer que cette similitude f est une rotation, et préciser ses éléments caractéristiques.
- 3) Soit J le point d'affixe $3 + 5i$.

Montrer que la rotation R de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B .

- 4) On appelle \mathcal{I} le point d'affixe $1 + i$, M et N les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$. Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère $IMJN$.

5) On considère les points P et Q tels que les quadrilatères $IAPB$ et $ICQD$ sont des carrés directs.

a) Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q .

b) Déterminer $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $(\overline{IA}, \overline{IP})$ et $(\overline{IC}, \overline{IQ})$.

En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.

c) En déduire que J est l'image de M par g . Que peut-on en déduire pour J ?

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a = 1 \quad ; \quad b = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ; \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

- 1) a) Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d .
b) Représenter les points A, B, C et D .
- 2) Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude plane directe s de centre O qui transforme A en C .
- 3) On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points F, C et G sont alignés.
- 4) On considère la transformation φ qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour toute droite (Δ) du plan, on notera σ_{Δ} , la réflexion d'axe (Δ) .

- a) Soit r la transformation qui, à tout point M_1 d'affixe z_1 , associe le point M'_1 d'affixe z'_1 telle que : $z'_1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z_1 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques.

Exprimer r sous sa forme complexe simplifiée en faisant apparaître l'affixe de son centre.

- b) Exprimer φ sous la forme d'une composée de deux transformations que l'on déterminera.
- c) Déterminer deux points invariants de φ et en déduire la nature de φ .
- d) Déterminer graphiquement $\varphi(C)$.