CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 5	
Similitudes	*Le 25 mars 2008*

Exercice 1

1) Soit $z' = x' + iy'$ l'affixe de M' et $z = x + iy$ l'affixe de M.

Alors $z' = (-x - y + 2) + i(x - y - 1) = x(-1+i) + y(-1-i) + 2 - i = x(-1+i) + iy(-1+i) + 2 - i$.

D'où, $\boldsymbol{z'} = (-1+i)(x+iy) + 2 - i = \boldsymbol{(-1+i)z + 2 - i}$.

2) Comme s a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes, alors **s est une similitude plane directe**.

Le rapport de s est $|-1+i| = \sqrt{2}$.

L'angle de s est un argument de $-1+i$; or $-1+i = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

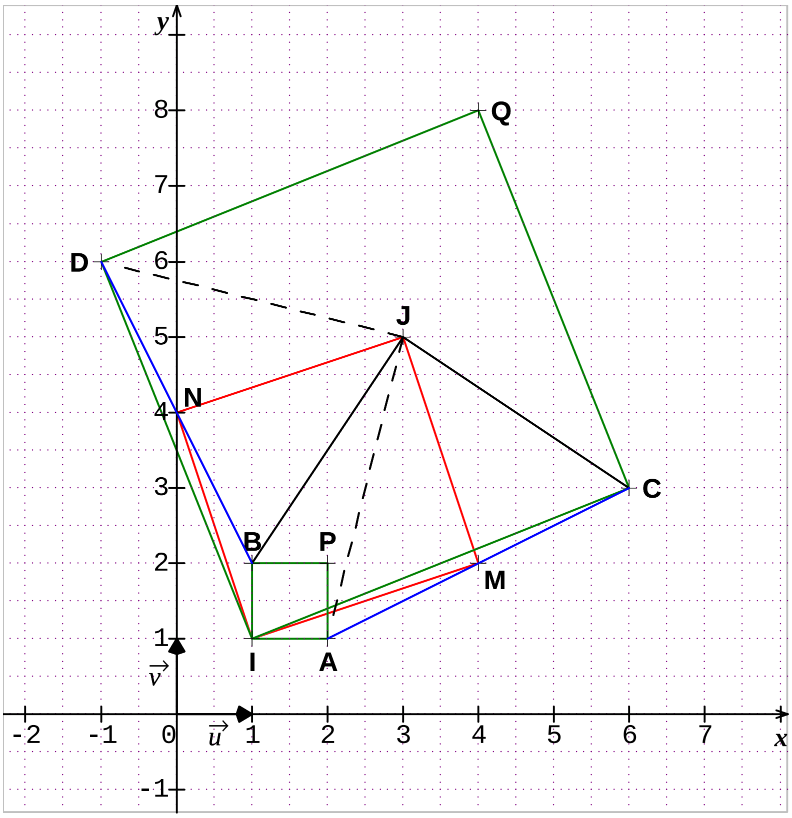
Donc, **l'angle de s est $\dfrac{3\pi}{4}$**.

Le centre de s est le point invariant par s ; résolvons alors l'équation $z' = z$.

$z' = z$ équivaut à $z = (-1+i)z + 2 - i$, c'est-à-dire à $z = (-1+i)z + 2 - i$; d'où $(2-i)z = 2 - i$.

Par conséquent, **le centre de s est le point Ω d'affixe 1**.

Exercice 2



2) a) Comme A et C sont distincts $(z_A \neq z_C)$, et que B et D sont distincts $(z_B \neq z_D)$, alors **il existe une seule similitude plane directe f qui transforme A en B et C en D**.

C. Lainé

b) D'après la question a), f a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes.

Comme $f(A) = B$ et $f(C) = D$, alors on obtient le système suivant : $\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_C + b \end{cases}$.

D'où : $a = \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \dfrac{(1+2i)-(-1+6i)}{(2+i)-(6+3i)} = \dfrac{2-4i}{-4-2i} = \dfrac{(2-4i)(-4+2i)}{(-4-2i)(-4+2i)} = \dfrac{20i}{20} = i$.

De plus, $b = z_B - az_A = 1+2i - i(2+i) = 1+2i-2i+1 = 2$.

Par conséquent, **l'écriture complexe de f est de la forme $z' = iz + 2 = e^{i\frac{\pi}{2}}z + 2$**.

On en déduit alors que **f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$**.

Le centre de f est le point invariant par f ; résolvons alors l'équation $z' = z$.

$z' = z$ équivaut à $z = iz + 2$, c'est-à-dire à $(1-i)z = 2$; d'où $z = \dfrac{2}{2-i} = 1+i$.

Par conséquent, **le centre de f est le point $\mathcal{I}$ d'affixe $1 + i$**.

3) La rotation R a pour écriture complexe $z' - z_J = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_J) = -i(z - z_J)$, c'est-à-dire $\boldsymbol{z' = -iz - 2 + 8i}$.

Soit A' l'image de A par R. Alors, $z_{A'} = -iz_A - 2 + 8i = -i(2+i) - 2 + 8i = -1 + 6i = z_D$.
Par conséquent, ***R* transforme *A* en *D***.

Soit C' l'image de C par R. Alors, $z_{C'} = -iz_C - 2 + 8i = -i(6+3i) - 2 + 8i = 1 + 2i = z_B$.
Par conséquent, ***R* transforme *C* en *B***.

4) Comme f transforme A en B et C en D, que M et N sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$ et que la rotation conserve les milieux, alors f transforme M en N.

Alors, $\begin{cases} \mathcal{I}M = \mathcal{I}N \\ \left(\overrightarrow{\mathcal{I}M}, \overrightarrow{\mathcal{I}N}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$.

Comme R transforme A en D et C en B, que M et N sont les milieux respectifs des segments [AC] et [BD] et que la rotation conserve les milieux, alors R transforme M en N.

Alors, $\begin{cases} JM = JN \\ \left(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JN}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$.

Par conséquent, $\mathcal{I}MJN$ est un quadrilatère ayant deux angles opposés ayant pour mesure $\frac{\pi}{2}$ et deux côtés consécutifs de même longueur ; on en déduit que **$\mathcal{I}MJN$ est un carré**.

5) a) Comme $\mathcal{I}APB$ est un carré, alors $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{\mathcal{I}B}$; d'où : $z_P - z_A = z_B - z_{\mathcal{I}}$.
Donc, $\boldsymbol{z_P} = z_A + z_B - z_{\mathcal{I}} = (2+i) + (1+2i) - (1+i) \boldsymbol{= 2 + 2i}$.

Comme $\mathcal{I}CQD$ est un carré, alors $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{\mathcal{I}D}$; d'où : $z_Q - z_C = z_D - z_{\mathcal{I}}$.
Donc, $\boldsymbol{z_Q} = z_C + z_D - z_I = (6+3i) + (-1+6i) - (1+i) = \boldsymbol{4 + 8i}$.

b) $[\mathcal{I}P]$ est la diagonale du carré $\mathcal{I}APB$, alors $\mathcal{I}P = \sqrt{2} \times \mathcal{I}A$. Donc, $\boldsymbol{\dfrac{\mathcal{I}P}{\mathcal{I}A} = \sqrt{2}}$.

$[IQ]$ est la diagonale du carré $ICQD$, alors $IQ = \sqrt{2} \times IC$. Donc, $\dfrac{\boldsymbol{IQ}}{\boldsymbol{IC}} = \sqrt{\mathbf{2}}$.

Comme $IAPB$ est un carré direct, alors $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{IA}}, \overrightarrow{\boldsymbol{IP}}\right) = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} \quad [\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$.

Comme $ICQD$ est un carré direct, alors $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{IC}}, \overrightarrow{\boldsymbol{IQ}}\right) = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} \quad [\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$

D'après ce qui précède, on en déduit que ***g*** **est la similitude directe de centre $\boldsymbol{I}$ et d'angle $\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$ et de rapport $\sqrt{\mathbf{2}}$**.

c) D'après la question 4), $IMJN$ est un carré direct et comme $[IJ]$ est une diagonale de ce carré, alors $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{IM}}, \overrightarrow{\boldsymbol{IJ}}\right) = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} \quad [\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$ et $\boldsymbol{IJ} = \sqrt{\mathbf{2}} \times \boldsymbol{IM}$.

Par conséquent, ***J*** **est l'image de *M* par *g***.

Comme g transforme respectivement A en P, C en Q, M en J, que M est le milieu de $[AC]$, et qu'une similitude conserve les milieux, alors ***J*** **est le milieu de $[\boldsymbol{PQ}]$**.

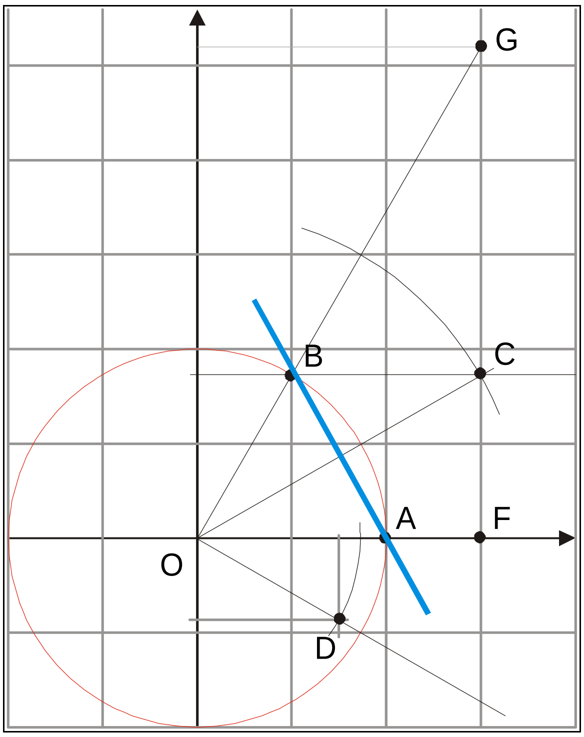
<u>Exercice 3</u>

1) a)

$c = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; d'où : $|c| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}$. Donc : $\boldsymbol{c} = \sqrt{3}\left(\dfrac{3}{2\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{\mathbf{3}}\mathbf{e}^{i\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}}$

$\boldsymbol{d} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos(-\dfrac{\pi}{6}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{6})\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} - \boldsymbol{i}\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{c}}}{\mathbf{2}}$.

1b.



2) On a $s(O) = O$ et $s(A) = C$. De plus, s a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$.

On en déduit le système suivant : $\begin{cases} 0 = a\times 0 + b \\ \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = a\times 1 + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \end{cases}$.

Par conséquent, **l'écriture complexe de s est de la forme : $z' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}z$** .

Donc, ***s* est une similitude directe de centre *O*, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$** .

3) Les points F, G et C sont alignés, si et seulement si $\left(\overrightarrow{FG},\overrightarrow{FC}\right) = k\pi$ avec k entier relatif,

autrement dit, si $\arg\left(\dfrac{z_C - z_F}{z_G - z_F}\right) = k\pi$ ou si $\dfrac{z_C - z_F}{z_G - z_F}$ est un nombre réel.

Or $z_C = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_F = z_D{}' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}z_D = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{3}{2}$ et

$z_G = z_C{}' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\times\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

On remarque que les points F, C et G ont la même abscisse, donc ils sont tous sur la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$.

Par conséquent, **les points *F*, *G* et *C* sont donc alignés**.

4) a) Comme r a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes et $|a| = 1$, alors r est une rotation d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Cherchons un éventuel point invariant par r : Ω d'affixe w est invariant par r si, et seulement si, $w = e^{-i\frac{2\pi}{3}}w + \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, c'est-à-dire $w = \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)w + \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

D'où $w\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, ou encore $w\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Donc, $w = 1 = z_A$.

Par conséquent, ***r* est la rotation de centre *A*, d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$** .

On en déduit que **l'écriture complexe simplifiée de *r* est : $z_1{}' - 1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\left(z_1 - 1\right)$**.

4) b) Il est clair que φ est de la forme : $\varphi : z \overset{\sigma_{(OA)}}{\mapsto} \overline{z} = z_1 \overset{r}{\mapsto} z'$, on a donc $\boldsymbol{\varphi = r \circ \sigma_{(OA)}}$ **où $\sigma_{(OA)}$ est la réflexion d'axe (*OA*)**.

4) c) Il est évident que A est invariant par $\boldsymbol{\sigma_{(OA)}}$ et par r, donc par φ.

Déterminons $\varphi(B)$:

$$z_B{}' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\,\overline{z_B} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\,e^{-i\frac{\pi}{3}} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -1 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = z_B$$

Par conséquent, ***A* et *B* sont invariants par $\boldsymbol{\varphi}$**.

Comme la similitude φ admet deux points invariants, d'après le cours, φ est soit l'identité (ce qui n'est pas le cas), soit une réflexion.
Par conséquent, **$\boldsymbol{\varphi}$ est la réflexion d'axe (*AB*)**.

d) Graphiquement, **$\boldsymbol{\varphi}$(*C*) = *O***.