

DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

Surfaces

Le 20 mai 2008

Polynésie, juin 2007

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points $A(1; 3; 2)$, $B(4; 6; -4)$ et le cône (Γ) d'axe $(O; \vec{k})$, de sommet O et contenant le point A .

1) Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$.

2) Soit (P) le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B .

a) Déterminer une équation de (P) .

b) Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ) .

3) Soit (Q) le plan d'équation $y = 3$. On note (C_2) l'intersection de (Q) et de (Γ) .

Sans justification reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :

- deux droites parallèles ;
- deux droites sécantes ;
- une parabole ;
- une hyperbole ;
- un cercle.

Partie B

Soient x , y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées $(x; y; z)$.

Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la **partie A**.

1) On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Résoudre l'équation (E).

b) En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2) a) Démontrer que si le point M de coordonnées $(x; y; z)$, où x , y et z sont des entiers relatifs, est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.

b) Montrer que si M est un point de (C_2) alors $x^2 \equiv 1 \pmod{10}$.

c) Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $x^2 \equiv 1 \pmod{10}$.

d) Déterminer un point de (C_2) , distinct de A , dont les coordonnées sont des entiers relatifs.