

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

Surfaces

Le 20 mai 2008

Polynésie, juin 2007

Partie A

1) Un cône a une équation de la forme $x^2 + y^2 = k z^2$. Or (Γ) contient le point A , alors

$$x_A^2 + y_A^2 = k z_A^2, \text{ c'est-à-dire } k = \frac{x_A^2 + y_A^2}{z_A^2} = \frac{1+9}{4} = \frac{5}{2}.$$

Par conséquent, **une équation de (Γ) est $x^2 + y^2 = \frac{5}{2} z^2$.**

2) a) (P) est un plan parallèle au plan (xOy) , il a donc une équation de la forme $z = \alpha$.

Or (P) contient le point B , alors **(P) a pour équation $z = -4$.**

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad M(x; y; z) \in (P) \cap (\Gamma) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2} z^2 \\ z = -4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2} \times 16 = 40 \\ z = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que **(C_1) est le cercle de centre Ω de coordonnées $(0; 0; -4)$ et de rayon $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, tracé dans le plan (P) .**

$$\begin{aligned} \text{3)} \quad M(x; y; z) \in (Q) \cap (\Gamma) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2} z^2 \\ y = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} z^2 - x^2 = 9 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que **(C_2) est une hyperbole.**

Partie B

1) a) Les nombres x et y ne peuvent, en valeur absolue être supérieurs à 6. On remarque que les seuls « carrés » dont la somme est égale à 40 sont 36 et 4.

Les couples solutions de (E) sont donc : $(-6; -2)$, $(-6; 2)$, $(-2; -6)$, $(-2; 6)$, $(2; -6)$, $(2; 6)$, $(6; -2)$ et $(6; 2)$.

b) Le point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient à (C_1) si, et seulement si,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 40 \\ z = -4 \end{cases} \text{ (d'après la question 2) b) de la partie A).}$$

D'après la question précédente, **on en déduit que l'ensemble des points de (C_1) , dont les coordonnées sont des entiers relatifs, ont pour coordonnées : $(-6 ; -2 ; -4)$, $(-6 ; 2 ; -4)$, $(-2 ; -6 ; -4)$, $(-2 ; 6 ; -4)$, $(2 ; -6 ; -4)$, $(2 ; 6 ; -4)$, $(6 ; -2 ; -4)$ et $(6 ; 2 ; -4)$.**

2) a) Si le point M de coordonnées $(x ; y ; z)$, où x , y et z sont des entiers relatifs, est un point de (Γ) , alors $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$, c'est-à-dire $2(x^2 + y^2) = 5z^2$.

Or 2 divise $2(x^2 + y^2)$, donc 2 divise $5z^2$. Comme 2 et 5 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 2 divise z^2 et donc z car z et z^2 sont deux entiers qui comprennent exactement les mêmes diviseurs premiers.

Comme 2 est un diviseur de z , alors z^2 est un multiple de 4, et, par suite, $\frac{5}{2}z^2$ est un

multiple de $4 \times \frac{5}{2} = 10$, c'est-à-dire $x^2 + y^2$ est un multiple de 10.

Par conséquent, **si le point M de coordonnées $(x ; y ; z)$, où x , y et z sont des entiers relatifs, est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.**

b) Soit $M(x ; y ; z)$ un point de (C_2) . Alors
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2 \\ y = 3 \end{cases}$$

D'après la question précédente, comme M est un point de (Γ) , on peut dire que $x^2 + y^2$ est divisible par 10, c'est-à-dire que $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{10}$. Or $y = 3$, d'où $x^2 + 9 \equiv 0 \pmod{10}$.

Or $x^2 + 9 \equiv 0 \pmod{10}$ équivaut à $x^2 \equiv -9 \pmod{10}$, ou encore à $x^2 \equiv 1 \pmod{10}$.

Par conséquent, **si M est un point de (C_2) alors $x^2 \equiv 1 \pmod{10}$.**

c)

Restes de la division de x par 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Restes de la division de x^2 par 10	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

En effet, si $x \equiv 6 \pmod{10}$, alors $x^2 \equiv 6^2 \pmod{10}$; or $36 \equiv 6 \pmod{10}$, d'où $x^2 \equiv 6 \pmod{10}$.

Par conséquent, **les solutions de l'équation $x^2 \equiv 1 \pmod{10}$ sont les entiers relatifs x tels que $x \equiv 1 \pmod{10}$ et $x \equiv 9 \pmod{10}$.**

d) Si $x = 1$ et $y = 3$, on obtient $\frac{5}{2}z^2 = 10$, c'est-à-dire $z = -2$ ou $z = 2$.

Donc le point de coordonnées $(1 ; 3 ; -2)$ est un point de (C_2) .