

**1. Exercice 1**

---

1) L'équation  $\ln(x+4) + \ln(x-2) = \ln(2x+1)$  est définie lorsque :

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ x-2 > 0, \text{ c'est-à-dire} \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \begin{cases} x > -4 \\ x > 2 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} .$$

Donc l'intervalle d'étude est  $]2 ; +\infty[$ .

$$\begin{aligned} \ln(x+4) + \ln(x-2) = \ln(2x+1) &\Leftrightarrow \ln[(x+4)(x-2)] = \ln(2x+1) \\ &\Leftrightarrow (x+4)(x-2) = 2x+1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x - 2x - 8 = 2x+1 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

Or  $-3 \notin ]2 ; +\infty[$ , donc l'équation  $\ln(x+4) + \ln(x-2) = \ln(2x+1)$  admet une seule solution 3.

**La réponse correcte est donc la B.**

2) La fonction  $f$  est décroissante sur  $[0 ; 4]$  et croissante sur  $[4 ; 7]$ .

La fonction  $g$  est décroissante sur  $[0 ; 2]$  et croissante sur  $[2 ; 7]$ .

Donc la réponse A est fausse.

Supposons que la fonction  $f$  soit la dérivée de la fonction  $g$ . Alors le signe de  $f$  détermine les variations de  $g$ . D'après le graphique,  $f$  est négative sur  $[0 ; 6]$  ; on en déduit que  $g$  est décroissante sur  $[0 ; 6]$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc la réponse B est fausse.

**La réponse correcte est donc la C.**

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ , d'après la limite d'une fonction composée,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

**La réponse correcte est donc la C.**

4) Si on pose  $u(x) = -x$  alors  $u'(x) = -1$ . D'où  $e^{-x} = -u'(x)e^{u(x)}$

Donc une primitive de  $x \mapsto e^{-x}$  est  $x \mapsto -e^{u(x)}$ .

$$\text{Alors : } \int_{-1}^0 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-1}^0 = (-e^0) - (-e^1) = -1 + e^1 = e - 1.$$

**La réponse correcte est donc la A.**

**2. Exercice 2**

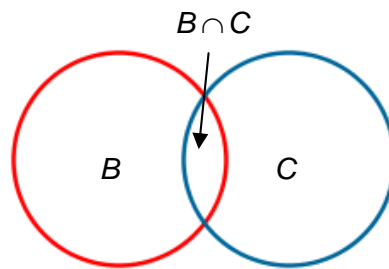
---

1) 4 % de ces chemisiers présentent un défaut de coloris, alors  $p(C) = \frac{4}{100} = 0,04$ .

3 % des chemisiers ont un bouton manquant, alors  $p(B) = \frac{3}{100} = 0,03$ .

2 % des chemisiers ont à la fois un défaut de coloris et un bouton manquant, alors

$$p(B \cap C) = \frac{2}{100} = 0,02$$



• On remarque que  $D = B \cup C$ , alors  $p(D) = p(B) + p(C) - p(B \cap C) = 0,03 + 0,04 - 0,02$ .  
Donc  $p(D) = 0,05$ .

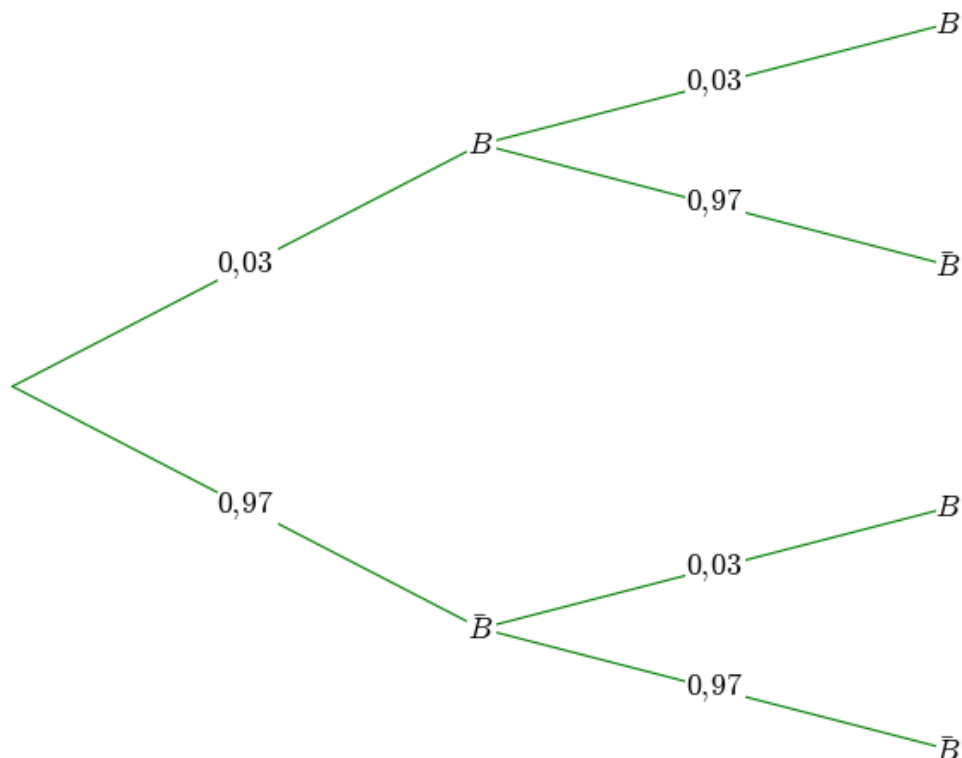
• On remarque que  $E = D \setminus (B \cap C)$ , alors  $p(E) = p(D) - p(B \cap C) = 0,05 - 0,02$ .  
Donc  $p(E) = 0,03$ .

• On remarque que  $F = \bar{D}$ , alors  $p(F) = 1 - p(D) = 1 - 0,05$ . Donc  $p(F) = 0,95$ .

2) On est amené à rechercher  $p_C(B)$ . Or  $p_C(B) = \frac{p(B \cap C)}{p(C)} = \frac{0,02}{0,04} = 0,5$ .

Donc la probabilité que le chemisier ait un bouton manquant sachant qu'il présente un défaut de coloris est égale à 0,5.

3) La loi de probabilité de la variable aléatoire comptant le nombre de chemises ayant un bouton manquant est une loi binomiale de paramètres 2 et 0,03.  
On peut modéliser l'expérience par un arbre pondéré :



La probabilité que, sur les deux chemisiers choisis, un seul ait un bouton manquant, est égale

à  $p(B \cap \bar{B}) + p(\bar{B} \cap B)$ .

D'après l'arbre pondéré,  $p(B \cap \bar{B}) + p(\bar{B} \cap B) = 0,03 \times 0,97 + 0,97 \times 0,03 = 0,0582$ .

Donc la probabilité que, sur les deux chemisiers choisis, un seul ait un bouton manquant, est égale à **0,0582**.

4) Si le chemisier a un seul défaut, son prix sera de :  $40 \times 0,8 = 32$  euros.

Si le chemisier a les deux défauts, son prix sera de :  $40 \times 0,5 = 20$  euros.

Alors les valeurs que peuvent prendre  $X$  sont : 20 ; 32 et 40.

a)  $p(X = 20) = p(B \cap C) = 0,02$  ;  $p(X = 32) = p(E) = 0,03$  ;  $p(X = 40) = p(F) = 0,95$ .

Donc la loi de probabilité de  $X$  est résumée par le tableau suivant :

$x_i$	20	32	40
$p(X = x_i)$	0,02	0,03	0,95

b) Le chiffre d'affaires moyen (en €) que peut espérer faire le propriétaire sur la vente d'un chemisier est égal à  $E(X)$ . Or  $E(X) = 20 \times 0,02 + 32 \times 0,03 + 40 \times 0,95 = 39,36$ .

Il vend 100 chemisiers, d'où :  $39,36 \times 100 = 3936$ .

Par conséquent, **en vendant 100 chemisiers, le propriétaire peut espérer faire un chiffre d'affaires de 3936 euros**.

### 3. Exercice 3

#### Partie A

1) a)  $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3)e^x = +\infty$  (par produit de limites).

Donc, par somme de limites,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [10 + (x-3)e^x] = +\infty$ . Par suite,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b) On a  $f = 10 + uv$  avec  $u(x) = x-3$  et  $v(x) = e^x$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0 ; +\infty[$ , et  $f' = u'v + uv'$  avec  $u'(x) = 1$  et  $v'(x) = e^x$ .

D'où  $f'(x) = 1 \times e^x + (x-3) \times e^x = (1+x-3)e^x$ .

Par conséquent, **pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = (x-2)e^x$** .

Pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$ ,  $e^x > 0$  ; alors le signe de  $f'(x)$  dépend de celui de  $(x-2)$ .

Or  $x-2$  s'annule pour  $x = 2$ , d'où :

$x$	0	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+

c) On en déduit le tableau de variations suivant :

$x$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$	7	$10 - e^2$	$+\infty$

d) D'après le tableau de variation précédent, la fonction  $f$  admet un minimum  $10 - e^2$  atteint en 2. Or  $10 - e^2 \approx 2,6$  ; alors, **pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$ .**

2) a) On a  $G = uv$  avec  $u(x) = x - 4$  et  $v(x) = e^x$ .

La fonction  $G$  est dérivable sur  $[0 ; +\infty[$ , et  $G' = u'v + uv'$  avec  $u'(x) = 1$  et  $v'(x) = e^x$ .

D'où  $G'(x) = 1 \times e^x + (x - 4) \times e^x = (1 + x - 4)e^x = (x - 3)e^x = g(x)$ .

Par conséquent,  **$G$  est une primitive de  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$ .**

b) On remarque que  $f(x) = 10 + g(x)$  pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$ .

Donc **une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$  est définie par**

$$F(x) = 10x + G(x) = 10x + (x - 4)e^x.$$

c) Par définition,  $F'(x) = f(x)$ . D'après la question 1) d),  $f$  est strictement positive sur  $[0 ; +\infty[$ . Par conséquent, **la fonction  $F$  est strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .**

### Partie B

1) D'après l'énoncé, pour tout  $x$  de  $[0 ; 4]$ ,  $C(x) = F(x) + k$  où  $k$  est une constante réelle.

Or  $C(0) = 20$ , d'où  $k = 20 - F(0) = 20 - (-4) = 24$ .

Par conséquent, pour tout  $x$  de  $[0 ; 4]$ ,  **$F(x) = 10x + (x - 4)e^x + 24$ .**

2) a) On est amené à résoudre l'équation  $f(x) = 11,292$ .

D'après le tableau de variations de la question 1) c) de la **partie A**, **il existe un seul réel  $x_0$  de l'intervalle  $]2 ; +\infty[$  tel que  $f(x_0) = 11,292$ .**

**Il est donc possible d'atteindre un coût marginal de 11 292 euros.**

b) D'après la calculatrice, on obtient :  $3,06 < x_0 < 3,061$ . (Voir ci-dessous)

Donc **la production correspondant à un coût marginal de 11 292 euros est égale à 3 060 kg, à 10 kg près.**

c)  $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$ . Alors  $C_m(3,06) = \frac{C(3,06)}{3,06} \approx 11,292$ .

Donc **le coût moyen de production pour une production de 3 060 kg du produit est environ égal à 11 292 euros.**

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
2	2,610944	<b>3</b>	<b>10</b>	3	10	<b>3,06</b>	<b>11,27965</b>
<b>3</b>	<b>10</b>	<b>3,1</b>	<b>12,2198</b>	3,01	10,20287	<b>3,061</b>	<b>11,30228</b>
<b>4</b>	<b>64,59815</b>	3,2	14,90651	3,02	10,40983	3,062	11,32496
		3,3	18,13379	3,03	10,62092	3,063	11,34767
		3,4	21,98564	3,04	10,83621	3,064	11,37043
		3,5	26,55773	3,05	11,05577	3,065	11,39324
		3,6	31,95894	<b>3,06</b>	<b>11,27965</b>	3,066	11,41609
		3,7	38,31311	<b>3,07</b>	<b>11,50793</b>	3,067	11,43898
		3,8	45,76095	3,08	11,74067	3,068	11,46192
		3,9	54,4622	3,09	11,97794	3,069	11,48491
		4	64,59815	3,1	12,2198	3,07	11,50793

#### 4. Exercice 4 (enseignement obligatoire)

1) a)  $\frac{348-7}{7} \times 100 \approx 4871.$

Donc le **pourcentage d'augmentation de la production entre 2000 et 2007 est d'environ 4 871 %.**

b) Soit  $t\%$  le taux annuel moyen. Alors  $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^7 = 1 + \frac{4871}{100}.$

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^7 = 1 + \frac{4871}{100} \Leftrightarrow 1 + \frac{t}{100} = (49,71)^{\frac{1}{7}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{100} = (49,71)^{\frac{1}{7}} - 1$$

$$\Leftrightarrow t = 100 \left[ (49,71)^{\frac{1}{7}} - 1 \right] \approx 74,72$$

Donc le **pourcentage d'augmentation annuel moyen de la production entre 2000 et 2007 est 74,72 %.**

c)  $7 \times \left(1 + \frac{74,72}{100}\right)^5 \approx 114.$

**En utilisant ce pourcentage d'augmentation annuel moyen de 74,72 %, la production d'énergie d'origine éolienne en 2005 est d'environ 114 Ktep.**

$$\frac{114-83}{83} \times 100 \approx 37,35.$$

**Dans ce cas, le pourcentage d'erreur par rapport à la valeur réelle est d'environ 37,35 %.**

2) a)

rang $x_i$	0	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(y_i)$	1,95	3,14	3,53	3,93	4,42	5,24	5,85

b) À l'aide de la calculatrice, la droite d'ajustement affine de  $z$  en  $x$ , obtenue par la méthode des moindres carrés, est :  $z = 0,54x + 1,92$ .

c)  $z = \ln y$  équivaut à  $e^z = y$  ; alors  $y = e^{0,54x+1,92}$  d'après la question précédente.

Or  $y = e^{0,54x+1,92} = e^{0,54x} \times e^{1,92} = (e^{0,54})^x \times e^{1,92}$ ,  $e^{1,92} \approx 6,82$  et  $e^{0,54} \approx 1,72$ .

Par conséquent, une approximation de  $y$  en  $x$  est donnée par :  $y \approx 6,82(1,72)^x$ .

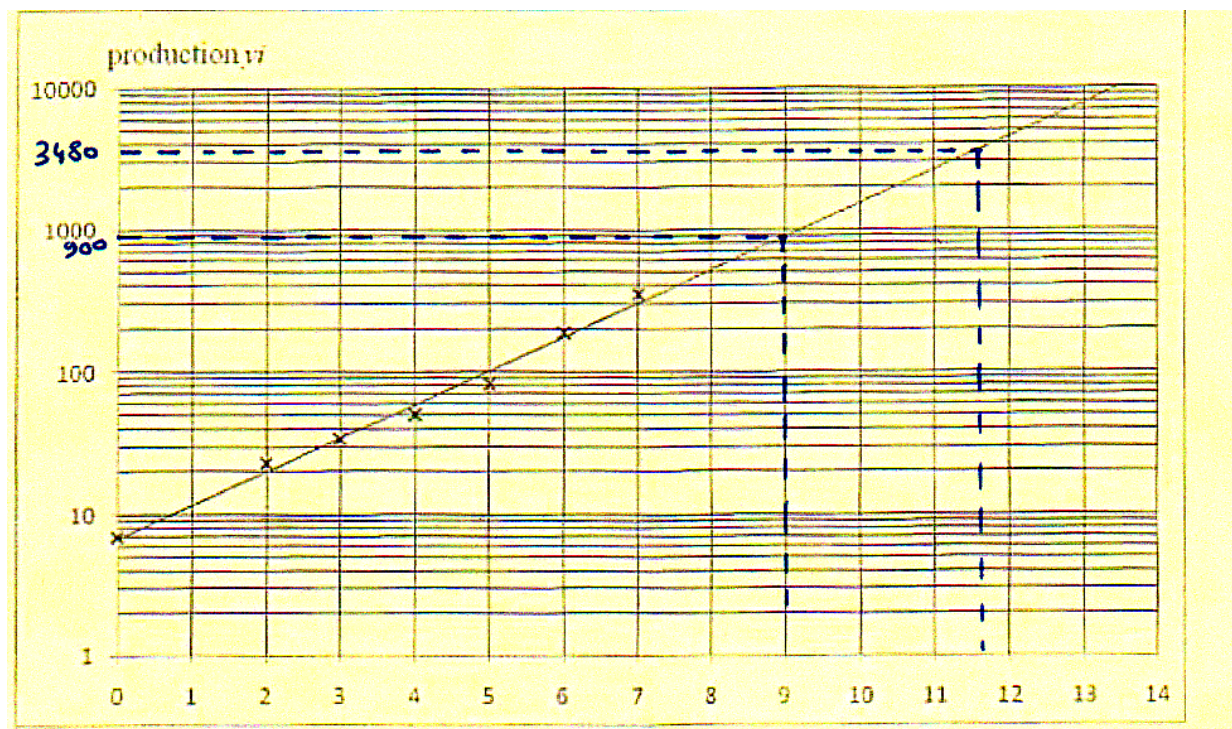
d) En 2005, le rang de l'année est 5 ; remplaçons  $x$  par 5 dans l'expression précédente. On obtient :  $6,82 \times 1,72^5 \approx 103$ .

**Avec cet ajustement, on peut estimer qu'en 2005, la production serait d'environ 103 Ktep.**

3) a) À l'aide du graphique, la production pour l'année 2009 correspond à l'ordonnée du point de la droite d'abscisse 9. Cette ordonnée est environ 900.

**Donc la production pour l'année 2009 peut être estimée à 900 Ktep.**

b)  $348 \times 10 = 3480$ . L'abscisse du point de la droite dont l'ordonnée est 3480 est à peu près 11,5. **Donc la production de 2007 sera multipliée par dix à partir de 2012.**



### 5. Exercice 4 (enseignement de spécialité)

1) a)  $A$  appartient à la surface, alors  $z_A = \sqrt{2x_A y_A} = \sqrt{2 \times 20 \times 40} = 40$ .

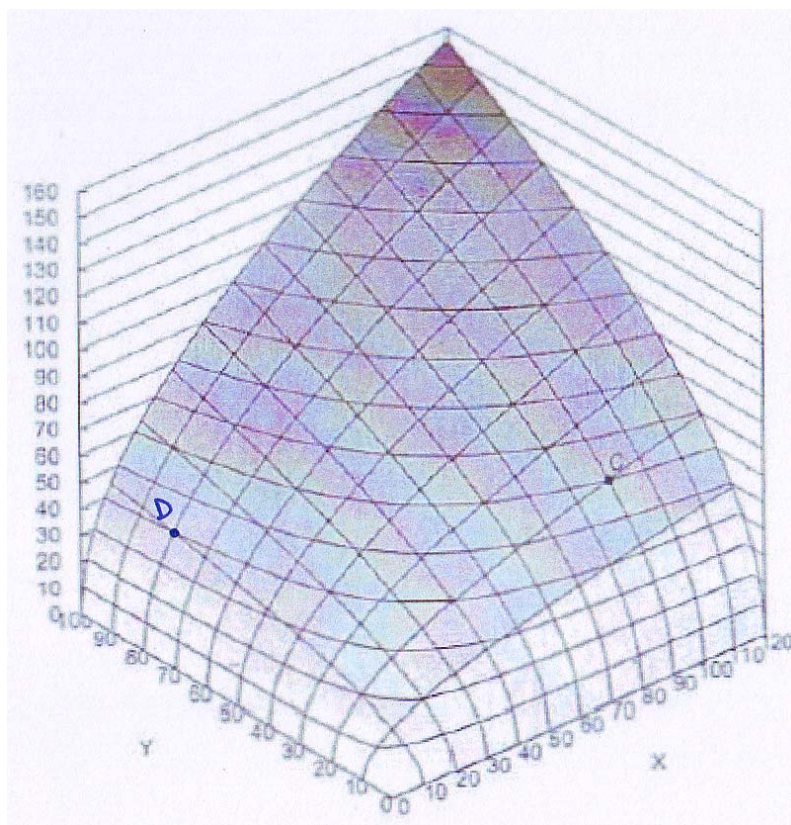
$B$  appartient à la surface, alors  $60 = \sqrt{2x_B y_B}$ . D'où :  $120y_B = z_B^2 = 3600$ , et par suite

$y_B = 30$ .

b) Les coordonnées de C sont (90 ; 20 ; 60).

Lorsque l'entreprise a recours à des emplois à temps partiel pour une durée globale de 90 heures et qu'elle loue le matériel nécessaire pour une durée globale de 20 heures, la surface de jardin traitée en une semaine est de 6 000 m<sup>2</sup>.

c)



d) Si  $z = 50$ , alors  $\sqrt{2xy} = 50$ , et par suite  $2xy = 2500$ .

Donc  $y = \frac{1250}{x}$  si  $x$  est différent de 0.

Par conséquent, **la courbe de niveau  $z = 50$  est une hyperbole.**

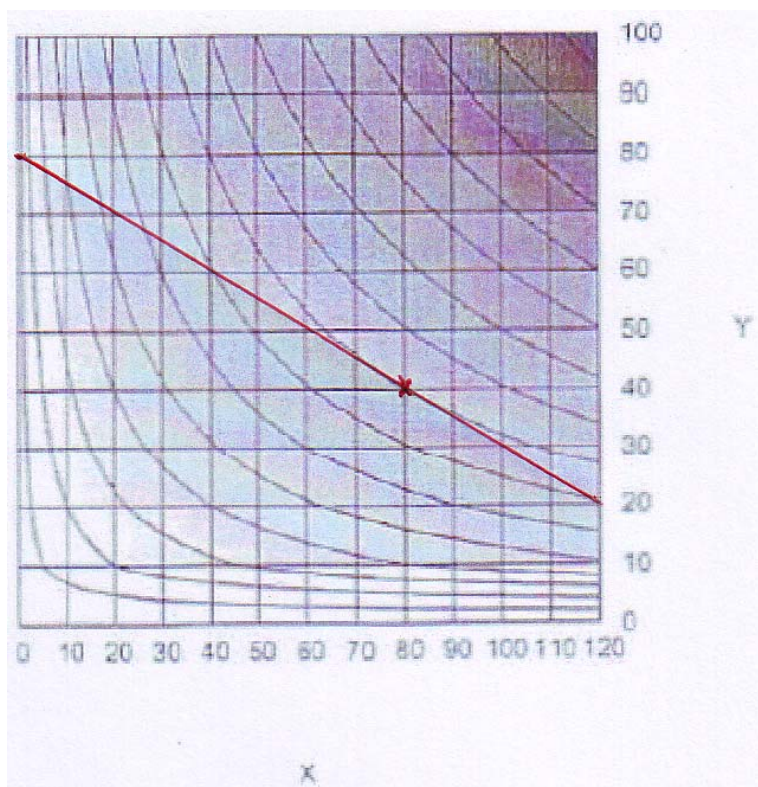
2) a) Une heure de travail coûte 15 euros et une heure de location du matériel coûte 30 euros. Comme les contraintes financières imposent de fixer le coût hebdomadaire correspondant à 2 400 €, alors on en déduit que  $15x + 30y = 2400$ .

$$\text{Or } 15x + 30y = 2400 \Leftrightarrow x + 2y = \frac{2400}{15} = 160 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 80.$$

Donc  $x$  et  $y$  sont liés par la relation  $y = -\frac{1}{2}x + 80$ .

b) L'ensemble ( $\mathcal{E}$ ) des points  $M(x ; y ; z)$  de l'espace dont les coordonnées vérifient  $y = -\frac{1}{2}x + 80$  est un plan.

c)



d) D'après le graphique, le point ayant la courbe de niveau la plus « élevée » est le point de coordonnées (80 ; 40). Dans ce cas,  $z = \sqrt{2 \times 80 \times 40} = 80$ .

Donc la surface de jardin maximum qu'on peut traiter avec un coût hebdomadaire de 2 400 euros est de 8 000 m<sup>2</sup>.

3) a) Comme  $y = -\frac{1}{2}x + 80$ , alors  $z = \sqrt{2x\left(-\frac{1}{2}x + 80\right)} = \sqrt{-x^2 + 160x}$ .

Par conséquent, sous la contrainte  $y = -\frac{1}{2}x + 80$ ,  $z = \sqrt{-x^2 + 160x}$ .

b) On a  $g = \sqrt{u}$  avec  $u(x) = -x^2 + 160x$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $]0 ; 120]$ , et  $g' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$  avec  $u'(x) = -2x + 160$ .

D'où  $g'(x) = \frac{-2x + 160}{2\sqrt{-x^2 + 160x}} = \frac{-x + 80}{\sqrt{-x^2 + 160x}}$ , pour tout  $x$  de  $]0 ; 120]$ .

Pour tout  $x$  de  $]0 ; 120]$ ,  $\sqrt{-x^2 + 160x} > 0$  ; alors le signe de  $g'(x)$  dépend de celui de  $(-x + 80)$ . Or  $-x + 80$  s'annule pour  $x = 80$ , d'où :

$x$	0	80	120
Signe de $g'(x)$		+	-

On en déduit que la fonction  $g$  est croissante sur  $]0 ; 120]$  et décroissante sur  $[80 ; 120]$ .

Par conséquent, la fonction  $g$  admet un maximum sur  $]0 ; 120]$  atteint en  $x = 80$ .

c) Si  $x = 80$ , alors  $y = -\frac{1}{2} \times 80 + 80 = 40$  et  $z = \sqrt{2 \times 80 \times 40} = 80$ .

**Donc un temps de travail de 80 heures et une durée de location hebdomadaires de 40 heures permettent de traiter une surface maximum.**