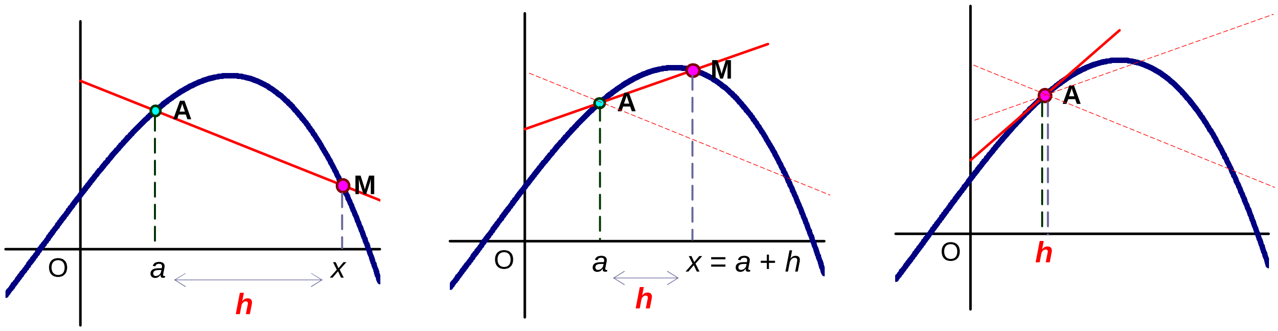
DÉRIVATION	
Cours	*Terminale ES*

1. Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
a et $x = a + h$ sont deux valeurs distinctes de I.
$\mathrm{A}\left(a\ ;\ f(a)\right)$ et $\mathrm{M}\left(x\ ;\ f(x)\right)$ sont deux points de la courbe représentative de la fonction.

Le coefficient directeur de la sécante (AM) à la courbe est $m = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, c'est le *taux de variation* de la fonction entre a et x.



Lorsque M devient de plus en plus proche de A, mais M ≠ A et si m a une limite quand x tend vers a, alors cette limite est le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe.
Autrement dit : Le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe est $\ell = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pourvu que cette limite existe. Dans ce cas, le nombre ℓ est appelé dérivé de la fonction f au point a. On le note $f'(a)$.
En posant $x = a + h$, on obtient une autre forme pour l'expression de la dérivée de la fonction f au point a : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

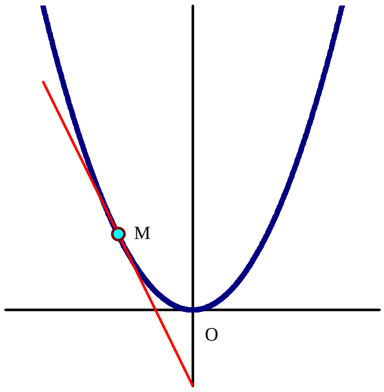
Définition 1 : La limite finie de l'accroissement moyen de la fonction f entre a et $a + h$, quand h tend vers 0, est le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Le nombre dérivé de f en a étant le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse a, nous pouvons en déduire l'équation de la tangente à la courbe au point A.

Définition 2 : Soit $\mathrm{A}\left(a\ ;\ f(a)\right)$ un point de la courbe représentative de la fonction f, l'équation de la tangente en A à la courbe est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

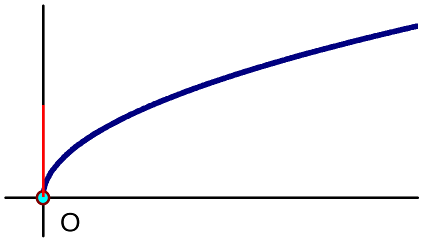
Exercice : *Soit f la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^2$.

Quelle est l'équation de la tangente au point M d'abscisse – 2 ?



……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………

Remarque : La courbe représentative d'une fonction *f* peut avoir une tangente en un point *a* sans que la fonction soit dérivable en *a*.



Par exemple, la courbe représentative de la fonction racine carrée est tangente à la droite d'équation *x* = 0 en 0. Or la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 ; en effet $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$, ce n'est pas une limite finie ; donc la fonction n'est pas dérivable en 0.

2. Fonction dérivée

Définition 3 : La dérivée d'une fonction *f* est la fonction f' définie par $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, là où cette limite existe.

Dans la définition de $f'(x)$, x est un réel quelconque de l'ensemble de définition de f.
Quand $f'(x)$ existe (*c'est à dire que la limite de la définition existe*), on dit que f est dérivable en x.

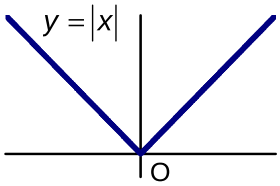
Théorème 1 (admis) : Si une fonction est dérivable en *a,* alors elle est continue en *a*.

Remarque : en terminale ES ce théorème est considéré comme admis.
Voici une idée de la démonstration : écrivons $f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a) + f(a)$ de façon à faire apparaître le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Calculons la limite : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) \times \lim\limits_{x\to a} (x-a) + \lim\limits_{x\to a} f(a)$.

Si *f* est dérivable en *a,* alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f'(a) \times 0 + \lim\limits_{x\to a} f(a) = f(a)$, et la fonction *f* est continue en *a*.

☠ **Attention la réciproque du théorème est fausse !**



Soit $f(x) = |x|$. La fonction *f* est continue en 0. Montrons que *f* n'est pas dérivable en 0.

$$\lim_{h\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-}(x)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=-1.$$

Les limites à droite et à gauche sont différentes, donc $f'(0)$ n'existe pas.

Dériver $f(x)$, ou calculer la dérivée de $f(x)$, signifie trouver l'expression de $f'(x)$.
Dans certains cas, nous avons des formules qui permettent le calcul de la dérivée sans utiliser la définition.

3. Dérivée des fonctions usuelles

$f(x)$	$ax+b$	x^2	x^n, $n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^n}$, $n\in\mathbf{N}^*$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$						
Intervalle de dérivabilité	**R**	**R**	**R**	**R***	**R***	$]0\,;\,+\infty[$

4. Dérivées et opérations sur les fonctions

Soient u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle I.
Soit k une constante réelle.
u' et v' sont les fonctions dérivées respectives de u et v.

Fonction	ku	$u+v$	uv	**v non nulle sur I** $\frac{u}{v}$
Dérivée	ku'	$u'+v'$	$u'v+uv'$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemples :
1) Soit $f(x)=\left(x^3+1\right)\left(2x^2-8x+5\right)$. *Calculer* $f'(x)$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2) Soit $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+1}$. Calculer $f'(x)$, puis déterminer les abscisses des points de la courbe de f pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

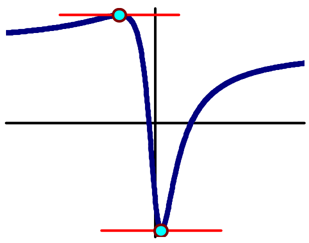
………

………

………

………

……



5. Dérivées et variations

Dans ce paragraphe nous allons utiliser le signe de la dérivée pour étudier les variations de la fonction *f*.

1) Sens de variation et signe de la dérivée

Théorème 2 (admis) : *f* est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si en tout point de I $f'=0$, alors *f* est ………………………… sur I.
- Si en tout point de I $f'\leq 0$, alors *f* est ………………………… sur I.
- Si en tout point de I $f'\leq 0$, alors *f* est ………………………… sur I.

Remarque : Si $f' > 0$ (*resp.* $f' < 0$) sur un intervalle]*a* ; *b*[, sauf en un nombre fini de points où f' s'annule, alors *f* est strictement croissante (*resp. décroissante*).

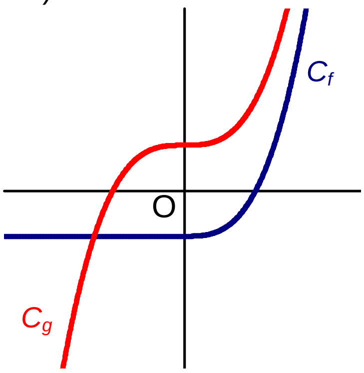
Exemple :

Soient f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ *par :*

$f(x) = \sqrt{x^6} + x^3 - 1$ *et* $g(x) = 2x^3 + 1$.

Exprimer $f(x)$ *sans le symbole* $\sqrt{}$ *, puis en déduire* $f'(x)$.

En déduire les variations de f, puis celles de g.



………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2) Extremum

Nous nous intéressons aux valeurs extrêmes locales d'une fonction.

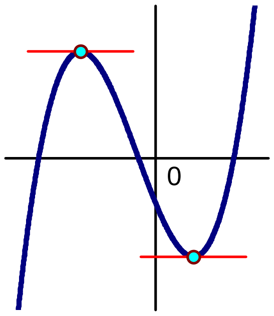
Définition 4 : Soit *c* un point du domaine de définition d'une fonction *f*.

- *f* (*c*) est un maximum relatif de *f* s'il existe un intervalle ouvert]*a* ; *b*[contenant *c* tel que $f(x) \leq f(c)$ pour tout *x* dans]*a* ; *b*[.
- *f* (*c*) est un minimum relatif de *f* s'il existe un intervalle ouvert]*a* ; *b*[contenant *c* tel que $f(x) \geq f(c)$ pour tout *x* dans]*a* ; *b*[.

Remarques : Le terme local est justifié par le fait que la fonction n'est considérée que sur un intervalle ouvert suffisamment petit autour de *c* pour que, *f* (*c*) soit la plus grande (ou la plus petite) valeur cet intervalle. Il est possible qu'en dehors de cet intervalle, *f* atteigne des valeurs plus grandes (ou plus petites).
Un maximum ou un minimum relatif de *f* est un extremum relatif.

Théorème 3 (admis) : Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle]*a* ; *b*[.
Si la dérivée de *f* s'annule en une valeur *c* de l'intervalle]*a* ; *b*[, en changeant de signe, alors la fonction *f* admet *f* (*c*) pour extremum local atteint en *c* .

Exemple :



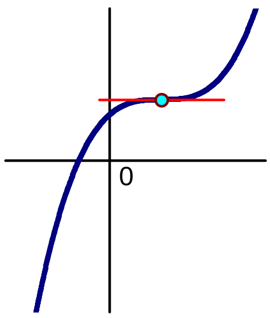
f est la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 6x - 3$.
$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x^2 + x - 2)$, or *f'* est une fonction polynôme du second degré qui s'annule pour $x_1 = -2$ ou $x_2 = 1$.
Nous pouvons établir le tableau des variations de la fonction *f*.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							

• Sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, la dérivée s'annule pour $x_1 = -2$; en outre $f'(x) > 0$ pour $x < -2$ et $f'(x) < 0$ pour $-2 < x < 1$. *f* admet un maximum *f* (–2) = 7 sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.

•Sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$, la dérivée s'annule pour $x_2 = 1$; en outre $f'(x) < 0$ pour $-2 < x < 1$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 1$. *f* admet un minimum *f* (1) = – 6,5 sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.

Remarques :
• La condition $f'(c) = 0$ n'est pas suffisante, en effet :



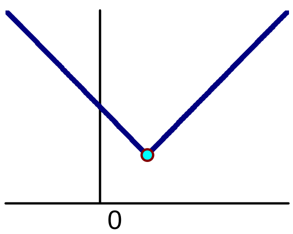
considérons la fonction *f* définie sur **R** par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$.
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$, f' s'annule pour $x_1 = 1$
Nous pouvons établir le tableau des variations de la fonction *f*.

x	$-\infty$	1	∞
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$		0	

Sur **R**, la dérivée s'annule pour $x_1 = 1$, mais $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x ; *f* n'admet pas un extremum sur **R**.

• Une fonction peut admettre un extremum sans être nécessairement dérivable, en effet :

considérons la fonction *f* définie sur **R** par $f(x) = |x - 1| + 1$.
f est une fonction affine par morceaux, *f* admet un minimum *f* (1) = 1 sur **R** ; or *f* n'est pas dérivable en 1.



6. Dérivée d'une fonction composée

1) Théorème

Théorème 4 (admis) : Soit *g* une fonction dérivable sur un intervalle J.
Soit *u* une fonction dérivable sur un intervalle I tel que pour tout x de I, $u(x) \in$ J.

Alors la fonction $f = g \circ u$ est dérivable sur I et pour tout x de I : $f'(x) = g'[u(x)] \times u'(x)$.

Exemple : *f est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \left(3x^2 - 2x + 1\right)^2$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2) Applications

u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et g est la fonction $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, alors la fonction $f = u^n$ est dérivable sur I et $f'(x) = n[u(x)]^{n-1} \times u'(x)$.

Exemple : *f est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 3)^3$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

u est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I, g est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction $f = \dfrac{1}{u^n}$ est dérivable sur I et , pour tout x de I, $f'(x) = -\dfrac{n}{[u(x)]^{n+1}} \times u'(x)$.

Exemple : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

u est une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I, g est la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, alors la fonction $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur I, et pour tout x de I, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Exemple : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3) Exercice

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ *:*

a) $f(x)=\left(5x^2-7\right)^3$; b) $g(x)=g(x)=\sqrt{4x^2-3x+1}$; c) $h(x)=\left(\dfrac{1-2x}{x^2+1}\right)^2$.

a) ....

....

....

....

....

b) ....

....

....

....

....

c) ....

....

....

....

....

7. Sens de variation d'une fonction composée

Théorème 5 : Soit f la fonction monotone sur un intervalle I et g une fonction monotone sur un intervalle J tel que, pour tout x de I, $f(x)\in \mathrm{J}$.

- Si f et g ont le même sens de variation, la composée $g\circ f$ est croissante sur I.
- Si f et g n'ont pas le même sens de variation, la composée $g\circ f$ est décroissante sur I.

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbf{R}^*$ par $h(x)=\dfrac{1}{3x^2}$.

« L'expression $\dfrac{1}{3\,x^2}$ peut se schématiser $x \longmapsto 3\,x^2 \longmapsto \dfrac{1}{3\,x^2}$ »

Soit f : $x \longmapsto 3\,x^2$ et g : $y \longmapsto \dfrac{1}{y}$.

Pour tout $x\in \mathbf{R}^*$, on a : $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}=g(f(x))=(g\circ f)(x)$. De plus, $\mathrm{D}_{g\circ f}=\mathrm{D}_h$.

Donc, $h=g\circ f$.

La fonction f est strictement décroissante sur]- ∞ ; 0[, et l'image de cet intervalle par f est f (]- ∞ ; 0[) =]0 ; + ∞[.
De plus, g est strictement décroissante sur]0 ; + ∞[.
On en déduit que $h=g\circ f$ est strictement croissante sur]- ∞ ; 0[.

La fonction f est strictement croissante sur]0 ; + ∞[, et l'image de cet intervalle par f est f (]0 ; + ∞[) =]0 ; + ∞[.
De plus, g est strictement décroissante sur]0 ; + ∞[.
On en déduit que $h=g\circ f$ est strictement décroissante sur]0 ; + ∞[.