RECHERCHE DE LA LIMITE DE $\dfrac{\ln x}{x}$ EN $+\infty$

Exercice donné au Bac en juin 2005 à Pondichéry	***Terminale ES***

L'objet de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$.

PARTIE A : ÉTUDE D'UNE FONCTION

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\ln x-\sqrt{x}$.

1) Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a : $f'(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$.

2) En déduire le tableau de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ (les limites aux bornes ne sont pas demandées).

3) Justifier alors que, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $\ln x<\sqrt{x}$.

PARTIE B : UTILISATION DES THÉORÈMES DE COMPARAISON

1) Démontrer que, pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a : $0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$..

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$.

C. Lainé