

PROBABILITÉS

Cours

Terminale ES

1. Vocabulaire des probabilités

1) Définitions et propriétés

En général, on note Ω l'ensemble des évènements élémentaires (ou univers) d'une expression aléatoire.

Exemple : on lance un dé non pipé et on note le chiffre apparu : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

En général, on note e_1, e_2, \dots, e_n les évènements élémentaires.

Lorsqu'on associe à chaque évènement élémentaire un nombre $p(e_i)$, appelé probabilité de e_i , tel que pour tout i , $0 \leq p(e_i) \leq 1$, et $p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_n) = 1$, on dit qu'on définit une **probabilité** sur Ω .

Exemple : Pour le lancer du dé non pipé, on obtient :

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}.$$

Un évènement A est un sous-ensemble de Ω . La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.

$p(\emptyset) = 0$ et $p(\Omega) = 1$.

Exemple : Lors du lancer de dé non pipé, le sous-ensemble $A = \{2 ; 4 ; 6\}$, correspond à l'évènement « le chiffre apparu est pair » et $p(A) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Équiprobabilité : Lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité, on dit que l'on est dans une situation d'**équiprobabilité**.

Propriété 1 : Lorsqu'on est dans une situation d'équiprobabilité et que le nombre d'éléments de Ω est n , alors :

- la probabilité de chaque évènement élémentaire est $\frac{1}{n}$;
- pour tout évènement A , $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Évènements contraires A et \bar{A} : \bar{A} est l'ensemble de tous les évènements élémentaires qui ne sont pas dans A .

On a : $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.

Évènements $A \cup B$ et $A \cap B$: $A \cap B$ désigne l'évènement (A et B) qui est réalisé lorsque à la fois A et B sont réalisés.

Ou encore : $A \cap B$, c'est à dire « A et B », est l'évènement constitué des évènements élémentaires qui sont à la fois dans A et dans B .

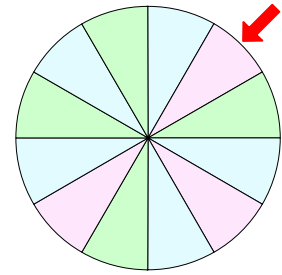
$A \cup B$ désigne l'évènement (A ou B) qui est réalisé lorsque l'un au moins des deux évènements est réalisé.

b) Application 2

Une roue est partagée en douze secteurs de même dimension.
Quand on fait tourner la roue elle s'arrête de façon aléatoire et la flèche ne peut indiquer qu'un seul secteur.

On note B l'évènement « le secteur désigné est bleu »,
 R l'évènement « le secteur désigné est rouge » et V l'évènement « le secteur désigné est vert »

Si on s'intéresse à la couleur du secteur du secteur désigné, déterminer $p(B)$, $p(R)$ et $p(V)$.



.....

.....

.....

.....

.....

2. Probabilités conditionnelles

1) Approche fréquentiste de la notion de probabilité conditionnelle

Les élèves de Terminale d'un lycée sont répartis en deux groupes : A et E selon leur langue vivante 1 (LV1) : anglais ou allemand. Le tableau suivant précise cette répartition en pourcentage pour les garçons (G) et les filles (F).

LV 1	anglais (A)	espagnol (E)
garçons (G)	32,5 %	12,5 %
filles (F)	35 %	20 %

Un élève est choisi au hasard dans le fichier des Terminales.

a) Calculer la probabilité que l'élève soit une fille (notée $p(F)$).

b) Calculer la probabilité que l'élève ait pour LV1 l'espagnol.

c) Sachant que l'élève est une fille, quelle est la probabilité que sa LV1 soit l'espagnol ?

d) Comparer ce résultat avec $\frac{p(E \cap F)}{p(F)}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) Définition

Définition 1 : Si $p(A) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé, notée $p_A(B)$ ou $p(B|A)$, est définie par : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Exemple : Une urne contient neuf boules indiscernables numérotées de 1 à 9.

On tire une boule et on note le numéro tiré.

Soit les événements : A : « le nombre tiré est un multiple de 3 » et B : « le numéro tiré est un nombre impair ». Calculer $p_B(A)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) Formule des probabilités composées

Lorsque $p(B) \neq 0$, on a aussi $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, ce que l'on peut écrire également sous la

forme $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$.

Ainsi, si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, on a $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A) = p(A) \times p_A(B)$.

Formule des probabilités composées : Soit A et B deux événements, de probabilité non nulle. Alors $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A) = p(A) \times p_A(B)$.

3. Arbre pondérés

Certaines situations peuvent être représentées par un arbre pondéré.

Règle d'utilisation : On admettra plus généralement que :

- La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- Lorsqu'une situation est représentée par un arbre pondéré, la probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

Règle des nœuds : La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1.

1) Application 1

On choisit au hasard une personne de la population décrite ci-dessous :

	<i>Malades</i>	<i>Sains</i>
<i>Fumeurs</i>	400	4600
<i>Non fumeurs</i>	600	14400

A est l'évènement : « la personne fume » ; B est l'évènement : « la personne est malade ». Représenter la situation par un arbre pondéré.

2) Application 2

Une urne contient trois boules rouges et deux boules vertes. On tire deux boules au hasard successivement sans remise.

A est l'évènement : « la première boule tirée est rouge » ;

B est l'évènement : « la deuxième boule tirée est rouge ».

Représenter la situation par un arbre pondéré.

4. Événements indépendants

Considérons le tirage au hasard d'une carte d'un jeu de 32 cartes. On note A l'événement « tirer un as », B l'événement « tirer un cœur » et C l'événement « tirer un as rouge ». Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cap B)$, $p(C)$ et $p(B \cap C)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1) Définition

Définition 2 : Dire que deux événements A et B sont indépendants signifie que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Remarque : Supposons que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.

Si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, alors $p_A(B) = p(B)$ et $p_B(A) = p(A)$.

Ainsi la probabilité d'obtenir A sachant que B est réalisé est égale à la probabilité d'obtenir A . intuitivement cela signifie que A ne dépend pas de B

⚠ Attention ! Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles. Deux événements A et B sont incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$. Ils vérifient alors : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

2) Application

On fait l'hypothèse que chacun des moteurs d'un avion bimoteur tombe en panne avec une probabilité égale à 0,0001 et ceci d'une façon indépendante l'un de l'autre.

Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port sachant qu'il peut voler avec un seul moteur ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) Application 3

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie.

- On estime que 12 % des bovins ont la maladie M.*
- Quand un bovin est malade, le test est positif dans 95% des cas.*
- 98% des bêtes saines ne réagissent pas au test.*

Soit M l'évènement : « l'animal est atteint de la maladie M », et, T l'évènement : « le test est positif ».

- 1) Quelle est la probabilité pour un animal d'être malade et de réagir au test ?*
- 2) On prend un animal au hasard et on lui fait passer le test quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?*
- 3) On veut déterminer la fiabilité de ce test. C'est à dire calculer la probabilité :*
 - a) pour un animal d'être malade si il réagit au test.*
 - b) pour un animal d'être sain si il ne réagit pas au test.*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

