CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 11	
Fonctions exponentielle et logarithme népérien, calcul d'intégrale et calcul d'aire	***Pour le 7 avril 2010***

<u>Exercice 1</u> *(Liban, juin 2008)*

1) a) Par lecture graphique : $\boldsymbol{f(-2)=6{,}5}$.

$f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à Γ au point d'abscisse -2. Or cette tangente est horizontale, d'où $\boldsymbol{f'(-2)=0}$.

b) Les valeurs de x dans l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$ vérifiant $f'(x)\geq 0$ sont les valeurs de x pour lesquelles la fonction f est croissante. Donc $\boldsymbol{f'(x)\geq 0}$ **lorsque** $\boldsymbol{x\in[-4\ ;-2]\cup[1\ ;6]}$.

c) Les valeurs de x dans l'intervalle $[-4\ ;\ 6]$ vérifiant $f(x)\leq x$ sont les abscisses des points de la courbe Γ qui se trouvent en dessous ou sur la droite Δ.
Donc $\boldsymbol{f(x)\leq x}$ **lorsque** $\boldsymbol{x\in[2\ ;6]}$.

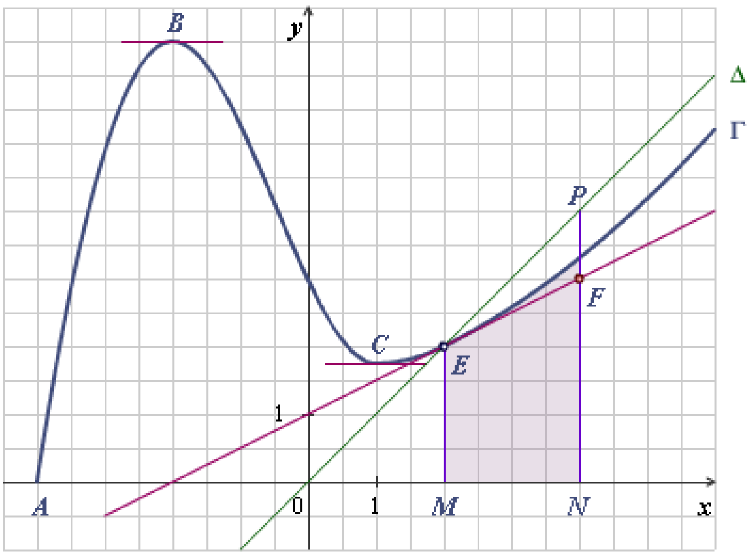
2) a) Comme $g=\ln\circ f$, alors les variations de g sont les mêmes que celles de f sur $]-4\ ;\ 6]$; en effet, la fonction ln est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Par conséquent, **la fonction $\boldsymbol{g}$ est croissante sur $\boldsymbol{]-4\ ;-2]}$ et sur $\boldsymbol{[1\ ;6]}$, et est décroissante sur $\boldsymbol{[-2\ ;1]}$**.

b) $\lim\limits_{x\to-4} f(x)=0^+$ et $\lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X>0}} \ln(X)=-\infty$, alors $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-4} g(x)=-\infty}$.

3) a) Sur l'intervalle $[2\ ;\ 4]$, la fonction f est positive.

Donc **$\boldsymbol{I}$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\boldsymbol{\Gamma}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $\boldsymbol{x=2}$ et $\boldsymbol{x=4}$**.

b) *1ère méthode* : On utilise un encadrement avec des aires de trapèzes.



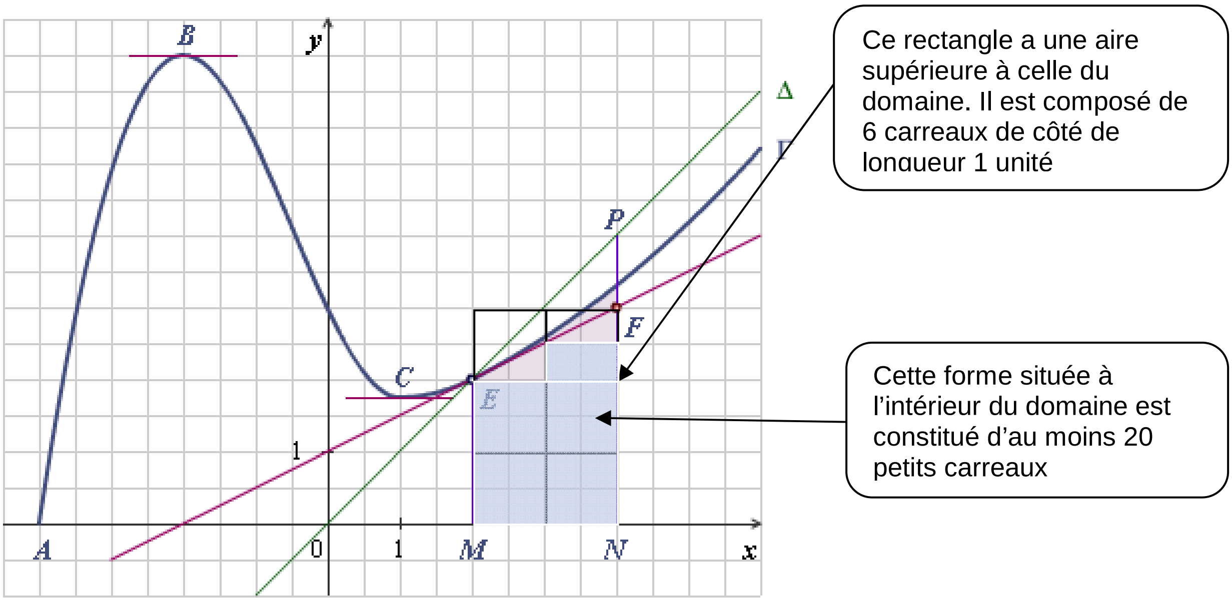
C. Lainé

On remarque que l'aire du domaine cherché est comprise entre l'aire du trapèze *EMNF* et celle du trapèze *EMNP*.

Or $\text{aire}(EMNF)=\dfrac{(EM+FN)\times MN}{2}=\dfrac{(2+3)\times 2}{2}=5$ et

$\text{aire}(EMNP)=\dfrac{(EM+PN)\times MN}{2}=\dfrac{(2+4)\times 2}{2}=6$. Par conséquent, $\mathbf{5 \le \mathcal{I} \le 6}$.

2^nde^ *méthode* : On utilise la méthode des rectangles compte les carrés de côté une unité.



On en déduit que $\mathbf{5 \le \mathcal{I} \le 6}$.

Exercice 2 *(Asie, juin 2009)*

PARTIE A : Étude des fonctions *f* et *g*.

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-4)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-4}=+\infty$ (limite d'une fonction composée).

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}(7-x)=-\infty$. Donc $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$ (par produit de limites).

b) On remarque que $f=ue^{v}$ avec $u(x)=7-x$ et $v(x)=x-4$.

D'où $f'=u'e^{v}+u\left(e^{v}\right)'=u'e^{v}+uv'e^{v}$ avec $u'(x)=-1$ et $v'(x)=1$.

On en déduit que $f'(x)=-e^{x-4}+(7-x)e^{x-4}=e^{x-4}[-1+7-x]$.

Par conséquent, **pour tout nombre réel** x **de l'intervalle** $[\mathbf{0}\ ;+\infty[$, $\mathbf{f'(x)=(6-x)e^{x-4}}$.

c) Pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, $e^{x-4}>0$. Donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $(6-x)$

Or $6-x=0$ équivaut à $x=6$.

Par suite, **la fonction** f **est croissante sur** $[\mathbf{0}\ ;\mathbf{6}]$ **et décroissante sur** $[\mathbf{6}\ ;+\infty[$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$7\mathrm{e}^{-4}$	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

2) a) On remarque que $g = 2(\ln \circ h)$. Comme $2 > 0$, alors les variations de g sont celles de $\ln \circ h$.
On sait que la fonction ln est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, alors la fonction $\ln \circ h$ a les mêmes variations que celles de h sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Par conséquent, **la fonction g est strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$**.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+5}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1) = 1$ (règle du quotient des monômes de plus haut degré).
Or $\lim\limits_{X\to1} \ln(X) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right) = 0$ (limite d'une fonction composée).
Par suite, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0}$.
On en déduit que **la courbe représentative de la fonction g admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$**.

3) a) D'après la question 1) c), **on peut dire que la courbe C_1 représente la fonction f**.

b) Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes C_1 et C_2.
Donc **les valeurs approchées, arrondies à l'unité près, de l'équation $f(x) = g(x)$ sont 3 et 7**.

c) La différence entre les propositions de Perrine et d'Elliot concerne la primitive de f sur $[0\ ;\ 3]$. Vérifions donc quelle est une primitive correcte :

● *Pour Perrine* : $F = u\mathrm{e}^v$ avec $u(x) = 8 - x$ et $v(x) = x - 4$.

D'où $F' = u'\mathrm{e}^v + u\left(\mathrm{e}^v\right)' = u'\mathrm{e}^v + uv'\mathrm{e}^v$ avec $u'(x) = -1$ et $v'(x) = 1$.

On en déduit que $F'(x) = -\mathrm{e}^{x-4} + (8-x)\mathrm{e}^{x-4} = \mathrm{e}^{x-4}[-1+7-x] = (6-x)\mathrm{e}^{x-4} = f(x)$.

F est bien une primitive de f sur $[0\ ;\ 3]$.

● *Pour Elliot* : $F = u\mathrm{e}^v$ avec $u(x) = 7x - \dfrac{1}{2}\mathrm{x}^2$ et $v(x) = x - 4$.

D'où $F' = u'\mathrm{e}^v + u\left(\mathrm{e}^v\right)' = u'\mathrm{e}^v + uv'\mathrm{e}^v$ avec $u'(x) = 7 - \mathrm{x}$ et $v'(x) = 1$.

On en déduit que

$$F'(x) = (7-x)\mathrm{e}^{x-4} + \left(7x - \frac{1}{2}\mathrm{x}^2\right)\mathrm{e}^{x-4} = \mathrm{e}^{x-4}\left[7 - x + 7x - \frac{1}{2}\mathrm{x}^2\right] = \left(7 + 6x - \frac{1}{2}\mathrm{x}^2\right)\mathrm{e}^{x-4} \neq f(x).$$

F n'est pas une primitive de f sur $[0\ ;\ 3]$. **C'est donc Elliot qui s'est trompé**.

PARTIE B : Application économique

Comme le prix d'équilibre est le prix qui se forme sur le marché lorsque l'offre est égale à la demande, alors on recherche l'abscisse du point d'intersection des courbes C_1 et C_2 sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

D'après la question 3) b) de la partie A, cette abscisse est 3.
Par conséquent, **une valeur approchée du prix d'équilibre x_0 est 3000 tonnes, celle du prix d'équilibre y_0 est 1,5 euro par kg**.