

DEVOIR MAISON N° 2

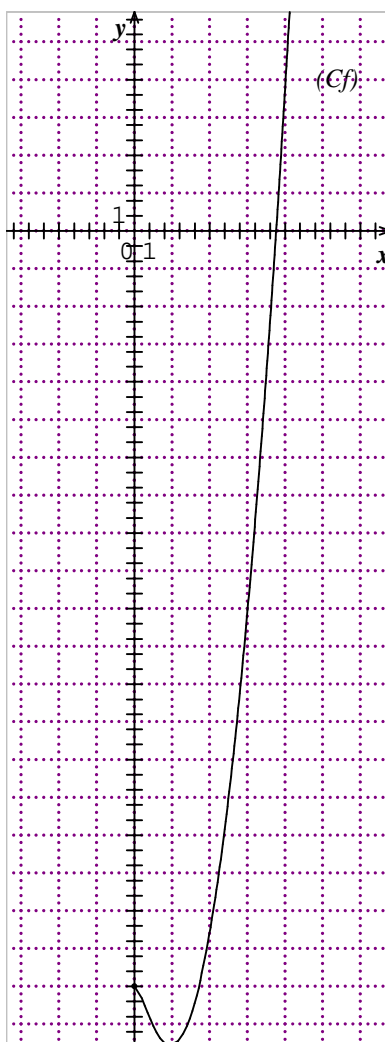
Coût marginal et coût moyen

Pour le 2 novembre 2009

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 50]$ par : $f(x) = x^2 + \frac{25x}{\sqrt{x+1}} - 50\sqrt{x+1}$.

La courbe (C_f) de f est donnée ci-dessous :



- 1) On admet que $f(x)$ s'annule pour une seule valeur α de l'intervalle $]0 ; 50[$; en déduire de la représentation graphique le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 50]$.
- 2) Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.
Pour la suite du problème, on prendra pour α la plus petite de ces deux valeurs.

PARTIE B

Une entreprise fabrique une quantité x exprimée en kilogrammes, d'un certain produit. Le coût marginal C , exprimé en euros est défini sur $[0 ; 50]$ par : $C(x) = 2x + \frac{25}{\sqrt{x+1}}$.

La fonction coût total, notée C_T , est définie par $C_T(x) = x^2 + 50\sqrt{x+1}$.

Le coût moyen est la fonction C_m définie par : $C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x}$ sur $]0 ; 50]$.

1) Donner une expression de $C_m(x)$ en fonction de x .

2) Vérifier que la dérivée de C_m peut se mettre sous la forme $C_m'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.

PARTIE C

1) Dédire des résultats précédents le tableau de variation de la fonction C_m sur $]0 ; 50]$.

2) Tracer dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de C_m sur $[1 ; 50]$.

3) Quelle est la production donnant le coût moyen minimal ?

Calculer alors le coût total et le coût marginal correspondant au coût moyen minimal.

DEVOIR MAISON N° 2

Coût marginal et coût moyen

Pour le 2 novembre 2009

PARTIE A

1) D'après la représentation graphique, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 50]$, on en déduit que :

x	0	α	50
Signe de $f(x)$	-	0	+

2) D'après la représentation graphique, $9 < \alpha < 10$.
Pour la suite du problème, on prendra $\alpha = 9$.

PARTIE B

1) Le coût moyen est la fonction C_m définie par : $C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x}$ sur $]0 ; 50]$.

Alors, pour tout x de $]0 ; 50]$, $C_m(x) = \frac{x^2 + 50\sqrt{x+1}}{x}$.

2) La fonction C_m est dérivable sur $]0 ; 50]$ en tant que fonction rationnelle.

On a : $C_m = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 + 50\sqrt{x+1}$ et $v(x) = x$.

Alors : $C_m' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2x + 50 \times \frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} = 2x + \frac{25}{\sqrt{x+1}}$ et $v'(x) = 1$.

D'où : $C_m'(x) = \frac{\left(2x + \frac{25}{\sqrt{x+1}}\right) \times x - (x^2 + 50\sqrt{x+1}) \times 1}{x^2} = \frac{2x^2 + \frac{25x}{\sqrt{x+1}} - x^2 - 50\sqrt{x+1}}{x^2}$.

Par conséquent, $C_m'(x) = \frac{x^2 + \frac{25x}{\sqrt{x+1}} - 50\sqrt{x+1}}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$, pour tout x de $]0 ; 50]$.

PARTIE C

1) Comme x^2 est strictement positif sur $]0 ; 50]$, alors le signe de $C_m'(x)$ dépend de celui de $f(x)$. Donc, d'après la question 1) de la **partie A**, on obtient :

x	0	α	50
$C_m'(x)$	-	0	+
$C_m(x)$	$+\infty$	$C_m(\alpha)$	$C_m(50)$

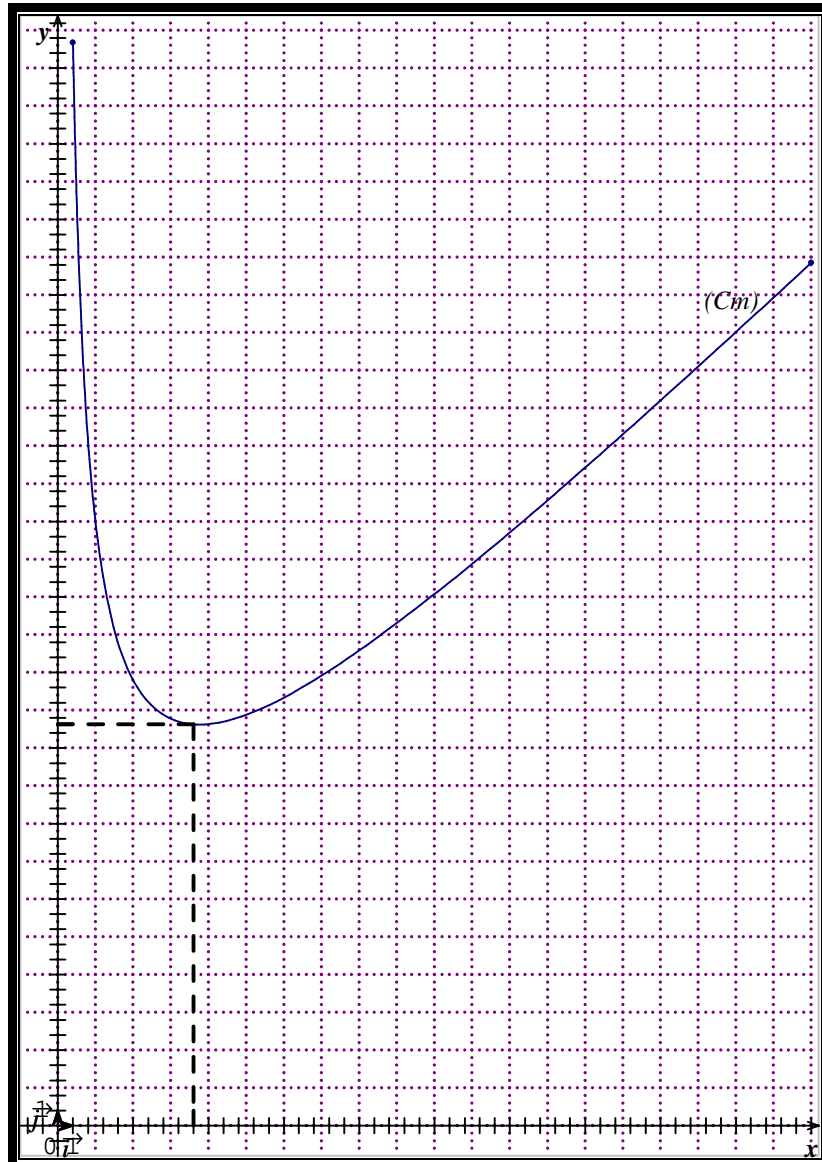
- $C_m(50) = 50 + \sqrt{51} \approx 57$ et $C_m(\alpha) \approx C_m(9) = 9 + \frac{50\sqrt{10}}{9} \approx 26,6$

- $\lim_{x \rightarrow 0} 50\sqrt{x+1} = 50$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{50\sqrt{x+1}}{x} = +\infty$; de plus, $\lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 0$.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0} C_m(x) = +\infty$

2)



3) D'après le tableau de variation, **le coût moyen minimum est atteint pour $x = \alpha$, c'est à dire pour une production d'environ 9 kg.**

Dans ce cas, $C(9) = 2 \times 9 + \frac{25}{\sqrt{9+1}} = 18 + \frac{5}{2}\sqrt{10} \approx 25,9$ et

$C_T(9) = 9^2 + 50\sqrt{9+1} = 81 + 50\sqrt{10} \approx 239$.

Par conséquent, **lorsque le coût moyen est minimum, le coût total est environ de 239 € et le coût marginal d'environ 25,9 €**