CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 2

Coût marginal et coût moyen	***Pour le 2 novembre 2009***

PARTIE A

1) D'après la représentation graphique, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle [0 ; 50], on en déduit que :

x	0		α		50
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

2) D'après la représentation graphique, $\mathbf{9 < \alpha < 10}$.
Pour la suite du problème, on prendra $\boldsymbol{\alpha = 9}$.

PARTIE B

1) Le coût moyen est la fonction est la fonction C$_m$ définie par : $C_m(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$ sur]0 ; 50].

Alors, **pour tout x de]0 ; 50], $C_m(x) = \dfrac{x^2 + 50\sqrt{x+1}}{x}$**.

2) La fonction C$_m$ est dérivable sur]0 ; 50] en tant que fonction rationnelle.

On a : $C_m = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 + 50\sqrt{x+1}$ et $v(x) = x$.

Alors : $C_m{}' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2x + 50 \times \dfrac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} = 2x + \dfrac{25}{\sqrt{x+1}}$ et $v'(x) = 1$.

D'où : $C_m{}'(x) = \dfrac{\left(2x + \dfrac{25}{\sqrt{x+1}}\right) \times x - \left(x^2 + 50\sqrt{x+1}\right) \times 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 + \dfrac{25x}{\sqrt{x+1}} - x^2 - 50\sqrt{x+1}}{x^2}$.

Par conséquent, $\boldsymbol{C_m'(x)} = \dfrac{x^2 + \dfrac{25x}{\sqrt{x+1}} - 50\sqrt{x+1}}{x^2} = \boldsymbol{\dfrac{f(x)}{x^2}}$, **pour tout x de]0 ; 50]**.

PARTIE C

1) Comme x^2 est strictement positif sur]0 ; 50], alors le signe de $C_m'(x)$ dépend de celui de $f(x)$. Donc, d'après la question 1) de la ***partie A***, on obtient :

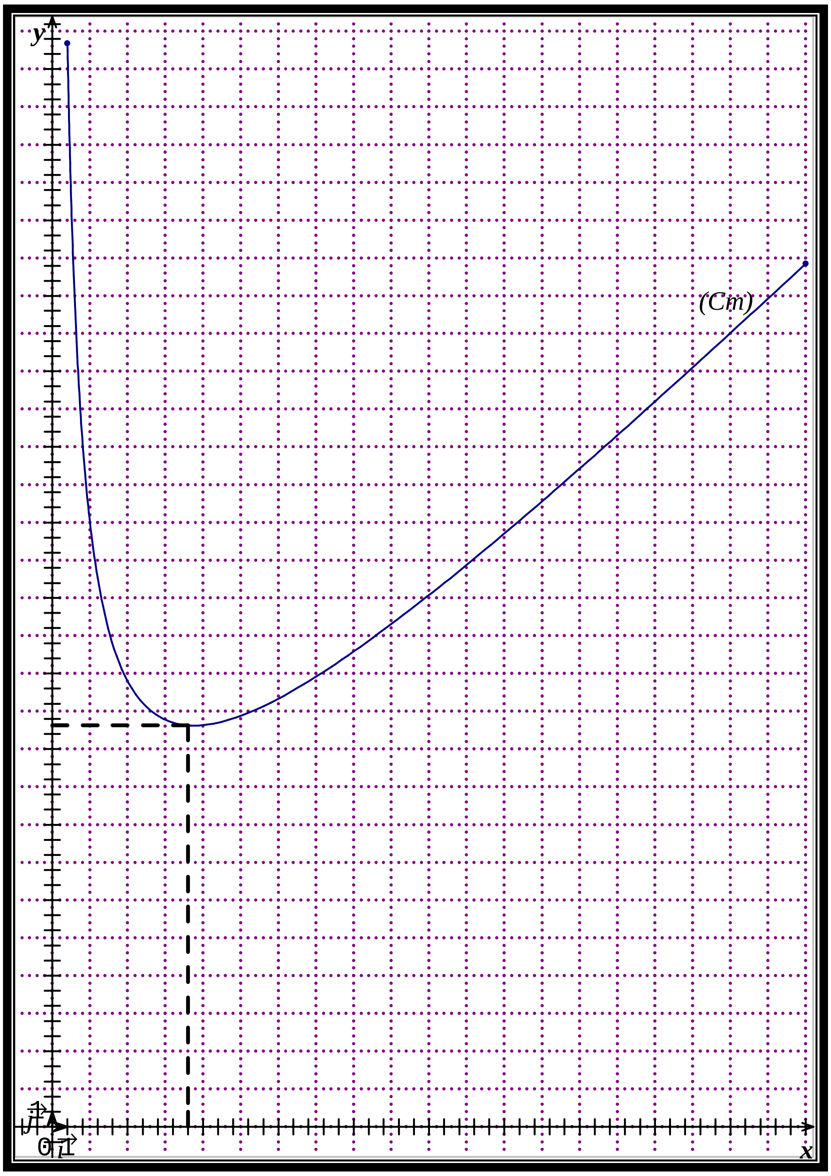
x	0		α		50
$C_m'(x)$		$-$	0	$+$	
$C_m(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$C_m(\alpha)$	$\nearrow$	$C_m(50)$

C. Lainé

- $C_m(50) = 50 + \sqrt{51} \simeq 57$ et $C_m(\alpha) \approx C_m(9) = 9 + \dfrac{50\sqrt{10}}{9} \simeq 26{,}6$
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} 50\sqrt{x+1} = 50 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0^+ \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{50\sqrt{x+1}}{x} = +\infty$; de plus, $\lim\limits_{x \to 0} (2x) = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 0} C_m(x) = +\infty$

2)



3) D'après le tableau de variation, **le coût moyen minimum est atteint pour $x = \alpha$, c'est à dire pour une production d'environ 9 kg**.

Dans ce cas, $C(9) = 2 \times 9 + \dfrac{25}{\sqrt{9+1}} = 18 + \dfrac{5}{2}\sqrt{10} \approx 25{,}9$ et

$C_T(9) = 9^2 + 50\sqrt{9+1} = 81 + 50\sqrt{10} \approx 239$.

Par conséquent, **lorsque le coût moyen est minimum, le coût total est environ de 239 € et le coût marginal d'environ 25,9 €**.