CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 5

Coût total, coût marginal et primitives	Pour le 27 novembre 2009

Exercice 1

1) Une primitive de la fonction $x \mapsto x^n$ sur **R** est $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$.

Donc **une primitive F de la fonction f sur $[0\,;10]$ est définie par**

$F(x) = 4\times\frac{1}{3}x^3 - 56\times\frac{1}{2}x^2 + 700x$**, c'est-à-dire $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - 28x^2 + 700x$** .

2) Soit x un réel de $[0\ ;\ 10]$. $\frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{(x+2)^3} = \frac{a(x+2)+b}{(x+2)^3} = \frac{ax+(2a+b)}{(x+2)^3} = \frac{x}{(x+2)^3}$.

Par identification, on obtient : $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$.

Or $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2a = -2 \end{cases}$.

Par conséquent, **pour tout x de $[0\,;10]$, $\frac{x}{(x+2)^3} = \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{2}{(x+2)^3}$** .

3) D'après la question précédente, $g(x) = \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{2}{(x+2)^3} = (x+2)^{-2} - 2(x+2)^{-3}$.

Posons $u(x) = x + 2$, alors $u'(x) = 1$. On en déduit que $g(x) = u'(x)u^{-2}(x) - 2u'(x)u^{-3}(x)$.

Or une primitive de la fonction $u'u^n$ est $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$.

D'où $G(x) = \frac{1}{-2+1}u^{-2+1}(x) - 2\times\frac{1}{-3+1}u^{-3+1}(x) = -u^{-1}(x) + u^{-2}(x) = -\frac{1}{u(x)} + \frac{1}{u^2(x)}$.

Par conséquent, **une primitive G de la fonction g sur $[0\,;10]$ est définie par**

$G(x) = -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$.

4) On remarque que pour tout x de $[0\ ;\ 10]$, $C_m(x) = f(x) - 500g(x)$.

Alors, **une primitive H de C_m sur $[0\,;10]$ est définie par $H(x) = F(x) - 500G(x)$, c'est-à-dire par $H(x) = \frac{4}{3}x^3 - 28x^2 + 700x + \frac{500}{x+2} - \frac{500}{(x+2)^2}$** .

5) Comme C_t est une primitive de C_m, alors $C_t = H + k$ où k est une constante réelle.

Or $C_t(0) = 0$, d'où : $H(0) + k = 0$, c'est-à-dire $k = -H(0) = -\left[0 + \frac{500}{2} - \frac{500}{4}\right] = -125$.

Donc, **pour tout x de $[0\,;10]$, $C_t(x) = \frac{4}{3}x^3 - 28x^2 + 700x + \frac{500}{x+2} - \frac{500}{(x+2)^2} - 125$** .

Le coût total associé à la production de 4000 pièces est égal à $C_t(4)$.

C. Lainé

$C_t(4)=\frac{4}{3}\times 64-448+2800+\frac{500}{6}-\frac{500}{36}-125=2227+\frac{256}{3}+\frac{250}{3}-\frac{125}{9}=2227+\frac{1393}{9}\approx 2382$

Donc **le coût total associé à la production de 4000 pièces est d'environ 2382 €**.

Exercice 2

1) On remarque que $G=\frac{u}{v^2}$ avec $u(x)=x+1$ et $v(x)=x+2$.

Alors $G'=\frac{u'v^2-u\left(v^2\right)'}{\left(v^2\right)^2}=\frac{u'v^2-u(2v'v)}{v^4}=\frac{u'v-2uv'}{v^3}$ avec $u'(x)=1$ et $v'(x)=1$.

D'où : $G'(x)=\frac{(x+2)-2(x+1)}{(x+2)^3}=\frac{-x}{(x+2)^3}$ avec $u'(x)=1$ et $v'(x)=1$.

Par conséquent, **pour tout x de $[0\,;10]$, $G'(x)=-\frac{x}{(x+2)^3}$**.

2) On remarque que $f(x)=1-9G'(x)$, pour tout x de $[0\,;10]$.

Donc **une primitive F de f sur $[0\,;10]$ est définie par $F(x)=x-9G(x)$, c'est-à-dire par $F(x)=x-\frac{9(x+1)}{(x+2)^2}$**.

3) D'après l'énoncé, la fonction C_t est la primitive de f sur $[0\,;10]$ telle que $C_t(0)=0$.

D'où $C_t(x)=F(x)+k$ et $C_t(0)=0$.

Or $C_t(0)=0$ équivaut à $0-\frac{9\times 1}{2^2}+k=0$, c'est-à-dire à $k=\frac{9}{4}$.

Par conséquent, **pour tout x de $[0\,;10]$, $C_t(x)=x-\frac{9(x+1)}{(x+2)^2}+\frac{9}{4}$**.

4) Par définition, on sait que $C_t'=f$. Or x est un réel de $[0\,;10]$, alors $\frac{9x}{(x+2)^3}\geq 0$.

D'où : $f(x)>0$ pour tout x de $[0\,;10]$.

Par conséquent, **la fonction C_t est strictement croissante sur $[0\,;10]$**.

5) $B(x)=x-C_t(x)$ car le produit est vendu 1 millier d'euros.

Donc **$B(x)=\frac{9(x+1)}{(x+2)^2}-\frac{9}{4}$, pour tout x de $[0\,;10]$**.

6) Comme $B(x)=x-C_t(x)$, alors $B'(x)=1-C_t'(x)$. Or $C_t'=f$.

Par conséquent, **$B'(x)=1-f(x)$, pour tout x de $[0\,;10]$**.

7) D'après la question précédente, $B'(x)=1-f(x)=1-1-\frac{9x}{(x+2)^3}=-\frac{9x}{(x+2)^3}$.

Comme $\frac{9x}{(x+2)^3}\geq 0$ pour tout x de $[0\,;10]$, alors $B'(x)\leq 0$.

Par conséquent, **la fonction B est strictement décroissante sur $[0\,;10]$**.