CORRECTION DU BAC BLANC 2010

Terminale ES obligatoire	Le 18 février 2010

Exercice 1

1) $F = 5 + \ln(u)$ avec $u(x) = 2x + 10$. Alors $F' = 0 + \frac{u'}{u}$ avec $u'(x) = 2$.

D'où $F'(x) = \frac{2}{2x+10} = \frac{1}{x+5}$, pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$.

Par conséquent, **la fonction $F : x \mapsto 5 + \ln(2x+10)$ est une primitive sur $[0\ ;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+5}$**.

2) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$ et que $\lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln[u(x)] = -\infty$.

3) Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du côté face sur les quatre lancers. X suit la loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{3}$. Donc la probabilité d'obtenir au moins une fois le côté face est égale à $1 - p(X = 0)$. Or $1 - p(X=0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$.

Par conséquent, **la probabilité d'obtenir au moins une fois le côté face est égale à $\frac{65}{81}$**.

4) Pour obtenir des boules de la même couleur, on peut soit n'obtenir que des blanches, soit n'obtenir que des noires. Or la probabilité d'obtenir n boules blanches est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et celle d'obtenir n boules noires est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Donc **la probabilité d'obtenir des boules qui ne soient pas toutes de la même couleur est égale à :** $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{2}{2^n} = \mathbf{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}$.

5) Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 10 % est égal à 0,9.
D'où le prix de revente du véhicule au bout de 5 ans sera égale à : $15000 \times (0{,}9)^5$.
Par conséquent, **la valeur à la vente du véhicule au bout de 5 ans sera de 8857,35 €**.

Exercice 2 *(Asie, juin 2008)*

1) Voir page suivante.

2) **À l'aide de la calculatrice, la droite (D) d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, est : $y = 0{,}32x + 6{,}29$**, ***en arrondissant les coefficients à 10^{-2} près***.

3) Comme la courbe $\mathscr{C}$ passe par les points de coordonnées $(4\ ;\ 7{,}61)$ et $(7\ ;\ 8{,}44)$, alors $\begin{cases} a\ln(4-3) + b = 7{,}61 \\ a\ln(7-3) + b = 8{,}44 \end{cases}$. Or $\begin{cases} a\ln(4-3) + b = 7{,}61 \\ a\ln(7-3) + b = 8{,}44 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 0 + b = 7{,}61 \\ a\ln(4) + b = 8{,}44 \end{cases}$, c'est-à-dire

à $\begin{cases} b = 7{,}61 \\ a\ln(4) = 8{,}44 - 7{,}61 = 0{,}83 \end{cases}$.

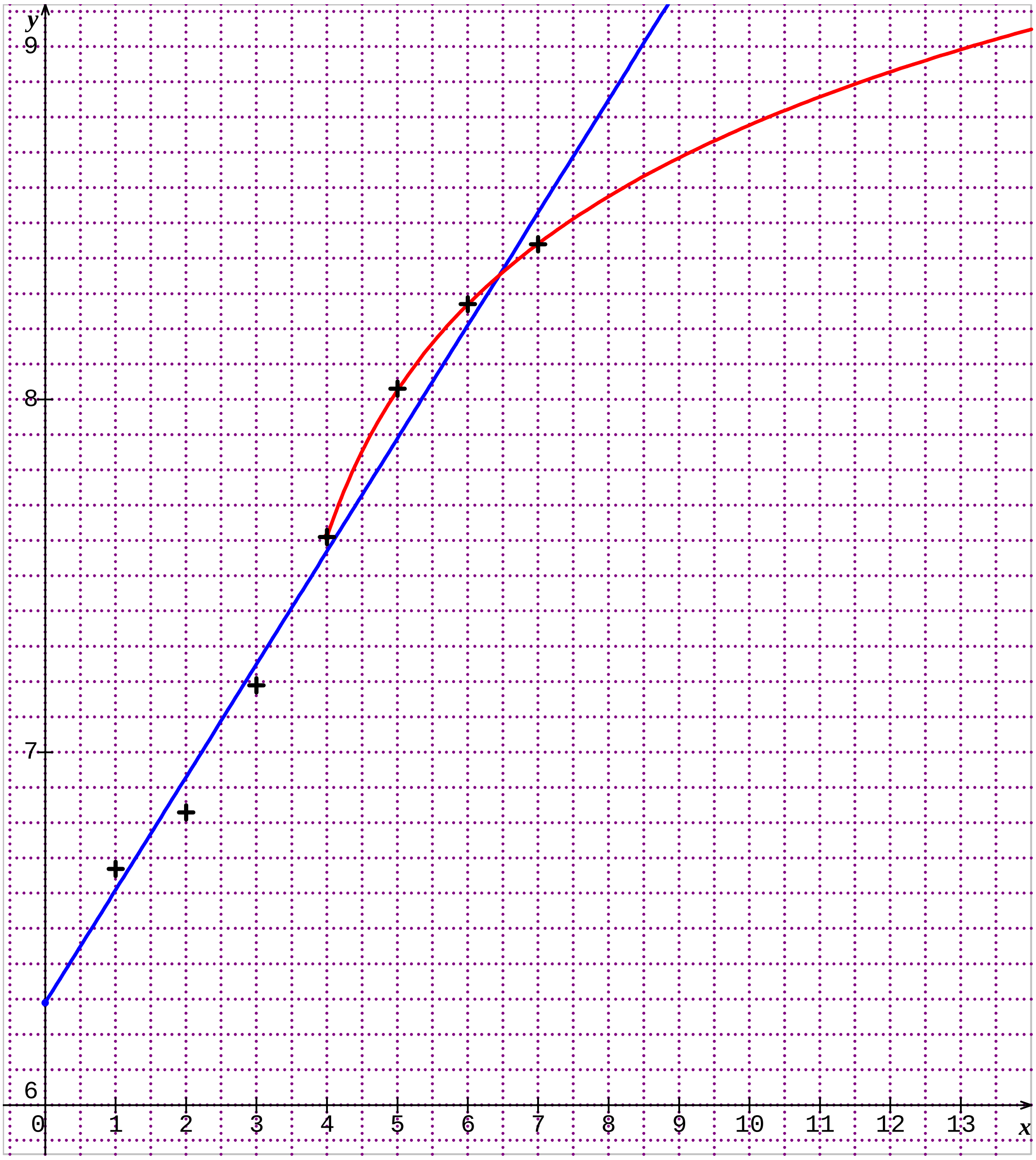
Par conséquent, $\begin{cases} \boldsymbol{b = 7{,}61} \\ \boldsymbol{a} = \dfrac{0{,}83}{\ln(4)} \approx \mathbf{0{,}60} \end{cases}$.

4) Le 1er juillet 2009 correspond au rang 9.

● Avec le premier modèle, remplaçons x par 9 dans l'équation de la droite (D).
On obtient : $0{,}32 \times 9 + 6{,}29 = 9{,}17$. D'où avec cet ajustement, on peut estimer que le SMIC aura une valeur de 9,17 € le 1er juillet 2009.

● Avec le second modèle, remplaçons x par 9 dans l'équation de la courbe $\mathscr{C}$.
On obtient : $0{,}60 \times \ln(9-3) + 7{,}61 \approx 8{,}69$. D'où avec cet ajustement, on peut estimer que le SMIC aura une valeur de 8,69 € le 1er juillet 2009.

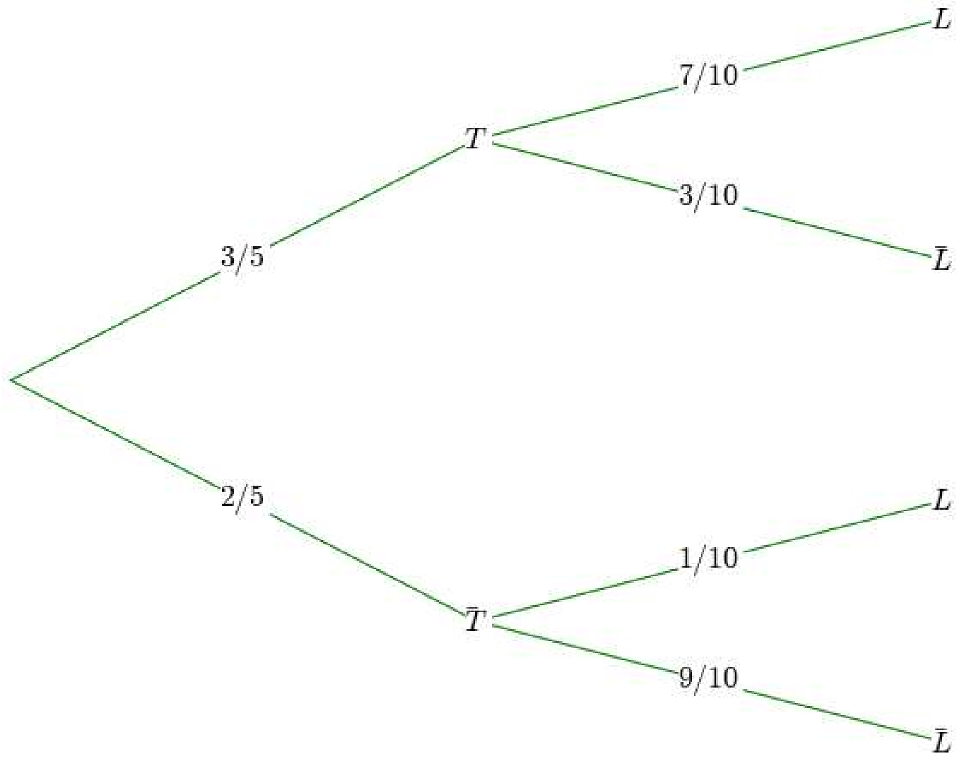
Par conséquent, **le premier modèle sera plus favorable à Arthur**.



C. Lainé

Exercice 3 *(Antilles, septembre 2008)*

1) Voir page suivante.



2) a) On recherche $p(T \cap L)$. Or $p(T \cap L) = p(T) \times p_T(L) = \frac{3}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{50}$.

La probabilité que la personne achète les deux appareils est égale à $\mathbf{\frac{21}{50}}$.

b) On recherche $p(L)$. Les événements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(L) &= p(T \cap L) + p(\overline{T} \cap L) \\ &= \frac{21}{50} + p(\overline{T}) \times p_{\overline{T}}(L) \\ &= \frac{21}{50} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{23}{50} \end{aligned}.$$

La probabilité que la personne achète le lecteur de DVD est égale à $\mathbf{\frac{23}{50}}$.

c) On recherche $p(\overline{T} \cap \overline{L})$. Or $p(\overline{T} \cap \overline{L}) = p(\overline{T}) \times p_{\overline{T}}(\overline{L}) = \frac{2}{5} \times \frac{9}{10} = \frac{18}{50} = \frac{9}{25}$.

La probabilité que la personne n'achète aucun des deux appareils est égale à $\mathbf{\frac{9}{25}}$.

3) On recherche $p_L(T)$. Or $p_L(T) = \frac{p(T \cap L)}{p(L)} = \frac{\frac{21}{50}}{\frac{23}{50}} = \frac{21}{50} \times \frac{50}{23} = \frac{21}{23}$.

Si la personne achète le lecteur de DVD, la probabilité qu'elle achète le téléviseur est $\mathbf{\frac{21}{23}}$.

4) a) Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 15% est égal à 0,85.
Or $500\times 0,85=425$ et $200\times 0,85=170$. Donc, après la promotion, le téléviseur coûtera 425 € et le lecteur de DVD 170 €.

Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 25% est égal à 0,75.
Or $700\times 0,75=525$. Donc, après la promotion, le téléviseur et le lecteur de DVD coûteront 525 €.
Par conséquent, **les valeurs possibles de *D* sont : 0 ; 170 ; 425 et 525**.

b) $p(D=0)=p\left(\overline{T}\cap\overline{L}\right)=\dfrac{9}{25}$; $p(D=170)=p\left(\overline{T}\cap L\right)=\dfrac{1}{25}$; $p(D=425)=p\left(T\cap\overline{L}\right)=\dfrac{9}{50}$ et $p(D=525)=p(T\cap L)=\dfrac{21}{50}$.
Donc la loi de probabilité de D est résumée par le tableau suivant :

d_i	0	170	425	525
$p(D=d_i)$	$\dfrac{9}{25}$	$\dfrac{1}{25}$	$\dfrac{9}{50}$	$\dfrac{21}{50}$

c) $E(D)=0\times\dfrac{9}{25}+170\times\dfrac{1}{25}+425\times\dfrac{9}{50}+525\times\dfrac{21}{50}=6,8+76,5+220,5=303,8$
L'espérance mathématique de *D* est égale à 303,8 €.

d) D'après la question précédente, un client dépensera en moyenne 303,80 € dans ce magasin. Or $80\times 303,8=24304$.
Donc **le responsable du rayon « image et son » peut espérer effectuer un chiffre d'affaire de 24 304 euros sur la vente de ces deux appareils**.

<u>**Exercice 4**</u> *(Polynésie, juin 2008)*
1) On en déduit que :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

2) a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x=0^+\\ \lim\limits_{x\to 0}\left[-\ln(x)\right]=+\infty\end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$ (par quotient de limites).

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\dfrac{2}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(2x-5)=-5$. Donc, par somme de limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5)=+\infty$. Donc, par somme de limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

3) a) On remarque que $f=2\times\dfrac{1}{v}-\dfrac{u}{v}+2v-5$ avec $u(x)=\ln(x)$ et $v(x)=x$.

Alors $f'=-2\times\dfrac{v'}{v^2}-\dfrac{u'v-uv'}{v^2}+2v'$ avec $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v'(x)=1$.

Donc $\boldsymbol{f'(x)} = -2\times\frac{1}{x^2} - \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)}{x^2} + 2 = \frac{-2-(1-\ln(x))+2x^2}{x^2} \boldsymbol{= \frac{\ln(x)+2x^2-3}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}}$,
pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b) D'après la question précédente et la question 1), on en déduit le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$	

c) Soit x un réel supérieur ou égal à e. Comme $e > \alpha$ et que f est strictement croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, alors $f(x) \geq f(e)$.

Or $f(e) = \frac{2}{e} - \frac{\ln(e)}{e} + 2e - 5 = \frac{2}{e} - \frac{1}{e} + 2e - 5 = \frac{1}{e} + 2e - 5 \approx 0{,}8$.

Par conséquent, **pour tout réel x supérieur ou égal à e, $f(x) > 0$.**

4) a) On remarque que $h = u^2$ avec $u(x) = \ln(x)$. Alors $h' = 2u'u^{2-1}$ avec $u'(x) = \frac{1}{x}$.

Donc $\boldsymbol{h'(x)} = 2\times\frac{1}{x}\times\ln(x) \boldsymbol{= 2\times\frac{\ln(x)}{x}}$, pour tout x de l'intervalle $]\mathbf{0}\,;\boldsymbol{+\infty}[$.

b) On remarque que pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2}h'(x) + 2x - 5$.

Or une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est la fonction logarithme népérien.

Une primitive de la fonction $x \mapsto 2x-5$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est la fonction $x \mapsto x^2 - 5x$.

De plus, une primitive de $\frac{1}{2}h'$ sur $]0\,;\,+\infty[$ est la fonction h.

Donc **une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est définie par**

$$\boldsymbol{F(x) = 2\ln(x) - \frac{1}{2}[\ln(x)]^2 + x^2 - 5x}\,.$$

c) $$\boldsymbol{F(e^2) - F(e)} = \left[2\ln(e^2) - \frac{1}{2}[\ln(e^2)]^2 + (e^2)^2 - 5e^2\right] - \left[2\ln(e) - \frac{1}{2}[\ln(e)]^2 + (e)^2 - 5e\right]$$

$$= \left[2\times 2\ln(e) - \frac{1}{2}[2\ln(e)]^2 + e^4 - 5e^2\right] - \left[2 - \frac{1}{2} + e^2 - 5e\right]$$

$$= \left[4 - \frac{1}{2}\times 4 + e^4 - 5e^2\right] - \left[2 - \frac{1}{2} + e^2 - 5e\right]$$

$$= 2 + e^4 - 5e^2 - 2 + \frac{1}{2} - e^2 + 5e$$

$$\boldsymbol{= e^4 - 6e^2 + 5e + \frac{1}{2}}$$