

BACCALAURÉAT BLANC

Mathématiques

Classe de TES

Durée 3 heures

Février 2010



C O L L È G E
P R O T E S T A N T
F R A N Ç A I S

SPECIALITÉ

L'utilisation de la calculatrice est autorisée

Du papier millimétré est à la disposition des candidats

Ce sujet comporte pages numérotées de 1 à 5

On rappelle que toute communication entre les candidats est interdite. L'échange de matériel durant l'épreuve (papier millimétré, correcteur, rapporteur....) est notamment proscrit.

Le candidat devra traiter la totalité du présent sujet.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (5 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la bonne affirmation. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1) La fonction $F: x \mapsto 5 + \ln(2x+10)$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{1}{x+5}$

$f(x) = \frac{1}{2x+10}$

$f(x) = 5 + \frac{1}{x+5}$

2) Soit u une fonction strictement positive sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ alors :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[u(x)] = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[u(x)] = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[u(x)] = 0$

3) Une pièce de monnaie est telle que la probabilité d'obtenir le côté face est égale à $\frac{1}{3}$. On lance 4 fois de suite cette pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le côté face ?

$\frac{18}{81}$

$\frac{72}{81}$

$\frac{65}{81}$

4) Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire au hasard, avec remise, n fois de suite une boule (avec $n > 1$). Quelle est la probabilité d'obtenir des boules qui ne soient pas toutes de la même couleur ?

$1 - \frac{1}{2^n}$

$1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

$1 - \frac{1}{2^{2n}}$

5) Un véhicule coûte 15 000 € en 2008. Il se déprécie de 10 % par an (c'est-à-dire que son prix de revente baisse de 10 % par an). Sa valeur à la vente au bout de cinq ans sera de :

7500 €

8857,35 €

5000 €

Exercice 2 : (5 points)

Élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une usine, on fabrique des produits chimiques. Une des matières est commandée chaque mois. Les contraintes de la production montrent que l'on doit commander 55% de plus que la commande du mois précédent, mais le stockage nécessite de diminuer cette commande de 60% de la commande deux mois avant.

Pour démarrer la production, les commandes faites les deux premiers mois sont de 30 tonnes, puis de 23 tonnes.

On note u_n la masse (en tonnes) de matières commandées le mois n . Ainsi $u_0 = 30$ et $u_1 = 23$.

1) a) Calculer u_2 et u_3 . Quel semble être le sens de variation de cette suite de commandes ?

b) Justifier la relation de récurrence : $u_{n+2} = 1,55u_{n+1} - 0,6u_n$.

2) On pose, pour tout entier n , $v_n = u_{n+1}$ et $P_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$.

a) Déterminer avec soin la matrice M telle que : $P_{n+1} = M \times P_n$.

b) Donner P_0 . En déduire P_n en fonction de M et P_0 . Calculer alors la masse le mois $n = 10$.

3) a) Démontrer par récurrence que : $u_n = 10 \times 0,8^n + 20 \times 0,75^n$, pour tout entier naturel n .

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) , puis la limite de la suite (u_n) .

c) Interpréter concrètement ces résultats pour les commandes faites par cette usine.

d) À l'aide de la calculatrice, trouver à partir de combien de mois la commande devient inférieure à 10 tonnes.

Exercice3 : (5 points)

Commun à tous les candidats

Au rayon « image et son » d'un grand magasin, un téléviseur et un lecteur de DVD sont en promotion pendant une semaine. Une personne se présente :

- la probabilité qu'elle achète le téléviseur est $\frac{3}{5}$;
- la probabilité qu'elle achète le lecteur DVD si elle achète le téléviseur est $\frac{7}{10}$;
- la probabilité qu'elle achète le lecteur DVD si elle n'achète pas le téléviseur est $\frac{1}{10}$.

On désigne par T l'événement : « la personne achète le téléviseur » et par L l'événement : « la personne achète le lecteur de DVD ».

On notera \bar{T} et \bar{L} les événements contraires respectifs de T et de L .

1) Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre de probabilités.

2) Déterminer les probabilités des événements suivants (les résultats seront donnés sous forme de fractions) :

- a) « la personne achète les deux appareils ».
- b) « la personne achète le lecteur de DVD ».
- c) « la personne n'achète aucun des deux appareils ».

3) Montrer que, si la personne achète le lecteur de DVD, la probabilité qu'elle achète le téléviseur est $\frac{21}{23}$.

4) Avant la promotion, le téléviseur coûtait 500 € et le lecteur de DVD 200 €.

Pendant cette semaine, le magasin fait une remise de 15% pour l'achat d'un seul des deux appareils et de 25% pour l'achat des deux appareils.

On désigne par D la dépense effective (en €) de la personne.

- a) Déterminer les valeurs possibles de D .
- b) Déterminer la loi de probabilité de D .
- c) Calculer l'espérance mathématique de D .
- d) Le responsable du rayon « image et son » prévoit qu'il se présentera dans la semaine 80 personnes intéressées par ces deux appareils.

Quel chiffre d'affaires peut-il espérer effectuer sur la vente de ces deux appareils ?

Exercice 4 : (5 points)

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 2x^2 - 3$.

Le tableau de variation de la fonction g est donné ci-dessous :

x	0	α	$+\infty$
g	$-\infty$	0	$+\infty$

En utilisant une calculatrice on a obtenu $\alpha \approx 1,19$.

Dresser le tableau donnant le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + 2x - 5$.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
- b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3) On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

- a) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
- c) Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel x supérieur ou égal à e.

Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

4) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.

- a) Calculer la dérivée h' de h .
- b) En remarquant que pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2}h'(x) + 2x - 5$, trouver une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- c) Calculer $F(e^2) - F(e)$. Donner la valeur exacte du résultat.