

Collège Protestant Français

Baccalauréat blanc

Corrigé de l'exercice de spécialité

Février 2010

1.

a.

$$u_2 = 1,55 \times u_1 - 0,6 \times u_0 = 1,55 \times 23 - 0,6 \times 30 = 17,65$$

$$u_3 = 1,55 \times u_2 - 0,6 \times u_1 = 1,55 \times 17,65 - 0,6 \times 23 = 13,5575$$

La masse de matières commandées le 2^{ème} et 3^{ème} mois sont de 17,65 et 13,5575 tonnes respectivement.

Cette suite de commande semble être décroissante.

b. Chaque mois, la commande de matières chimiques u_{n+2} augmente de 55% par rapport à celle du mois précédent u_{n+1} mais elle est diminuée de 60% de celle de deux mois précédent u_n .

$$D'où, u_{n+2} = 1,55 u_{n+1} - 0,6 u_n$$

2.

a. $v_n = u_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1} = 0u_n + 1v_n$

$$u_{n+2} = 1,55u_{n+1} - 0,6u_n \Leftrightarrow v_{n+1} = -0,6u_n + 1,55 u_{n+1} = -0,6u_n + 1,55 v_n$$

$$D'où, \begin{cases} u_{n+1} = 0 \times u_n + 1 \times v_n \\ v_{n+1} = -0,6 \times u_n + 1,55 \times v_n \end{cases}$$

Ce système peut être traduit par un produit matriciel ; en posant :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,6 & 1,55 \end{pmatrix} \quad P_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \text{ et } P_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ on aura alors :}$$

$$P_{n+1} = M \times P_n$$

b. $P_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 23 \end{pmatrix}$

$$P_1 = M \times P_0$$

$$P_2 = M \times P_1 = M \times M \times P_0 = M^2 \times P_0$$

$$P_3 = M \times P_2 = M \times M^2 \times P_0 = M^3 \times P_0$$

$$\text{Par itération on aura : } P_n = M^n \times P_0$$

$$D'où, P_{10} = M^{10} \times P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,6 & 1,55 \end{pmatrix}^{10} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 23 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,2 \\ 1,70 \end{pmatrix}$$

Par suite, la masse de la commande du 10^{ème} mois sera de 2,2 tonnes environ.

3.

a.

Initialisation :

$$10 \times 0,8^0 + 20 \times 0,75^0 = 30 = u_0$$

$$10 \times 0,8^1 + 20 \times 0,75^1 = 23 = u_1$$

Donc la relation est vérifiée pour les rangs 0 et 1.

Hérédité :

Supposons qu'elle est aussi vérifiée pour les rangs n et $n+1$, donc on aura :

$$u_n = 10 \times 0,8^n + 20 \times 0,75^n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 10 \times 0,8^{n+1} + 20 \times 0,75^{n+1}$$

$$\begin{aligned} u_{n+2} = 1,55 u_{n+1} - 0,6 u_n &\Leftrightarrow u_{n+2} = 1,55 \times (10 \times 0,8^{n+1} + 20 \times 0,75^{n+1}) - 0,6 \times (10 \times 0,8^n + 20 \times 0,75^n) \\ &= 15,5 \times 0,8^{n+1} + 31 \times 0,75^{n+1} - 6 \times 0,8^n - 12 \times 0,75^n \\ &= 0,8^{n+2} \times \left(\frac{15,5}{0,8} - \frac{6}{0,8^2} \right) + 0,75^{n+2} \times \left(\frac{31}{0,75} - \frac{12}{0,75^2} \right) \\ &= 10 \times 0,8^{n+2} + 20 \times 0,75^{n+2} \end{aligned}$$

Conclusion :

Par suite, la relation est vérifiée pour tout n : $u_n = 10 \times 0,8^n + 20 \times 0,75^n$

b.

- $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 10 \times 0,8^{n+1} + 20 \times 0,75^{n+1} - 10 \times 0,8^n + 20 \times 0,75^n \\ &= 10 \times 0,8^n (0,8 - 1) + 20 \times 0,75^n (0,75 - 1) \\ &= -2 \times 0,8^n - 5 \times 0,75^n \\ &= -(2 \times 0,8^n + 5 \times 0,75^n) \end{aligned}$$

Or ; $2 > 0$ et $0,8^n > 0$ donc $2 \times 0,8^n > 0$
 $5 > 0$ et $0,75 > 0$ donc $5 \times 0,75^n > 0$

Par suite, $(2 \times 0,8^n + 5 \times 0,75^n) > 0 \Leftrightarrow -(2 \times 0,8^n + 5 \times 0,75^n) < 0$

D'où, $u_{n+1} - u_n < 0$. Par conséquent, la suite (u_n) est décroissante.

- $0 < 0,8 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$ alors par produit de limites on aura : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10 \times 0,8^n = 0$
 $0 < 0,75 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$ alors par produit de limites on aura : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 20 \times 0,75^n = 0$

Donc par somme de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10 \times 0,8^n + 20 \times 0,75^n = 0$

Par conséquent, la suite (u_n) converge vers 0.

c. Les commandes mensuelles de matières chimiques faites par cette usine sont en baisse. Après un grand nombre de mois elles seront presque nulles.

d. A l'aide de la calculatrice on trouve que $u_4 = 10,424$ et $u_5 = 8,0228$

Donc la commande sera inférieure à 10 tonnes à partir du 5^{ème} mois.