

DEVOIR COMMUN N°1

**Limites et comportement asymptotique,
sens de variation et série statistiques à deux variables**

Le 14 novembre 2009

SPECIALITE

L'utilisation de la calculatrice est autorisée

Du papier millimétré est à la disposition des candidats

Ce sujet comporte pages numérotées de 1 à 6

On rappelle que toute communication entre les candidats est interdite. L'échange de matériel durant l'épreuve (papier millimétré, correcteur, rapporteur...) est notamment proscrit.

Le candidat devra traiter la totalité du présent sujet.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (4 points)
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple ; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et **recopiez l'affirmation exacte sans justifier votre choix.**

Barème : A chaque question est attribué 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à zéro.

Soit f la fonction définie sur $]4 ; +\infty[$ par $f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-4}$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1) Une autre expression de $f(x)$ est :

- $f(x) = -2x + 1 - \frac{2}{x-1}$;
- $f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 12}{4-x}$;
- $f(x) = \frac{2x^2 + 9x - 2}{x-4}$.

2) Soit f' la fonction dérivée de f sur $]4 ; +\infty[$. Une expression de $f'(x)$ est :

- $f'(x) = -2 - \frac{8}{(x-4)^2}$;
- $f'(x) = \frac{(2-x)(x-6)}{(x-4)^2}$;
- $f'(x) = \frac{-2x^2 + 16x - 24}{(x-4)^2}$.

3) La courbe Γ admet pour asymptote :

- la droite d'équation $y = 4$;
- la droite d'équation $x = 4$;
- la droite d'équation $y = 4x$.

4) La droite d'équation $y = -2x + 1$ est :

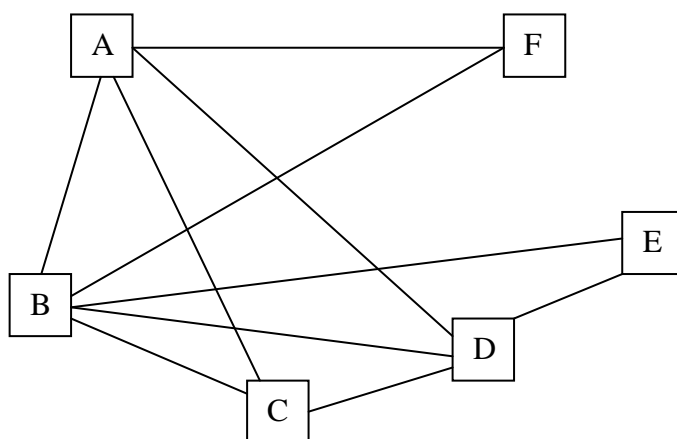
- asymptote à la courbe Γ ;
- située en dessous de la courbe Γ ;
- tangente à la courbe Γ .

Exercice 2 : (5 points)
Aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une grande ville a créé un jardin pédagogique sur le thème de l'écologie, jardin qui doit être visité par la suite par la majorité des classes de cette ville.
Ce jardin comporte six zones distinctes correspondant aux thèmes :

- | | | |
|--------------------------|------------------------|------------------------------------|
| A. Eau | B. Économie d'énergies | C. Plantations et cultures locales |
| D. Développement durable | E. Biotechnologies | F. Contes d'ici (et d'ailleurs) |

Ces zones sont reliées par des passages (portes) où sont proposés des questionnaires.
Le jardin et les portes sont représentés par le graphe ci-dessous (chaque porte et donc chaque questionnaire est représenté par une arête).



Question préliminaire :

Si un visiteur répond à tous les questionnaires, à combien de questionnaires aura-t-il répondu ?

Partie A

1. Donner la matrice G associée à ce graphe.
2. Le graphe est-il complet ? Est-il connexe ? Justifier.
3. Peut-on parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire :
 - a) en commençant la visite par n'importe quelle zone ?
 - b) en commençant la visite par la zone C (plantations et cultures) ? Dans ce cas, si la réponse est positive, quelle sera la dernière zone visitée.
(Dans les deux cas, a et b , justifiez votre réponse.)

Partie B

Pour illustrer chaque zone et présenter légendes et commentaires, les enfants ont décidé d'utiliser des supports de couleurs différentes.

Pour limiter le nombre de couleurs, on utilise des couleurs différentes seulement si les zones sont limitrophes (avec un passage entre les deux).

1. Donner et justifier un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
2. Déterminer alors en utilisant un algorithme adapté le nombre chromatique de ce graphe et proposer une répartition des couleurs.

Exercice 3 : (4 points)

Commun à tous les candidats

En France, depuis la loi Évin de 1991, le prix du tabac a été relevé à plusieurs reprises et les achats ont baissé. La tendance à la baisse s'est accentuée sur la période récente, de fortes hausses des prix ayant entraîné une chute des achats en volume de tabac.

Le tableau suivant, donne la consommation et le prix relatif du tabac en France pour les années 2000 à 2007 :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Prix du tabac x_i (Indice base 100 en 2000)	100	103,4	110,1	123,2	150,3	148,5	146,6	148,3
Consommation de tabac y_i (en grammes par personne de 15 ans et plus et par jour)	4,5	4,5	4,3	3,8	3,2	3,1	3,1	3

Source INSEE.

1) Calculer à 0,01 près, le pourcentage de variation de la consommation du tabac entre 2000 et 2007.

Peut-on dire que la consommation du tabac a baissé en moyenne de 5,6% par an en France entre 2000 et 2007 ?

2) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans le repère orthogonal ci-dessous.

3) *Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.*

Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.

Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x , obtenue par la méthode des moindres carrés.

Représenter la droite (D) dans le repère précédent.

Exercice 4 : (7 points)

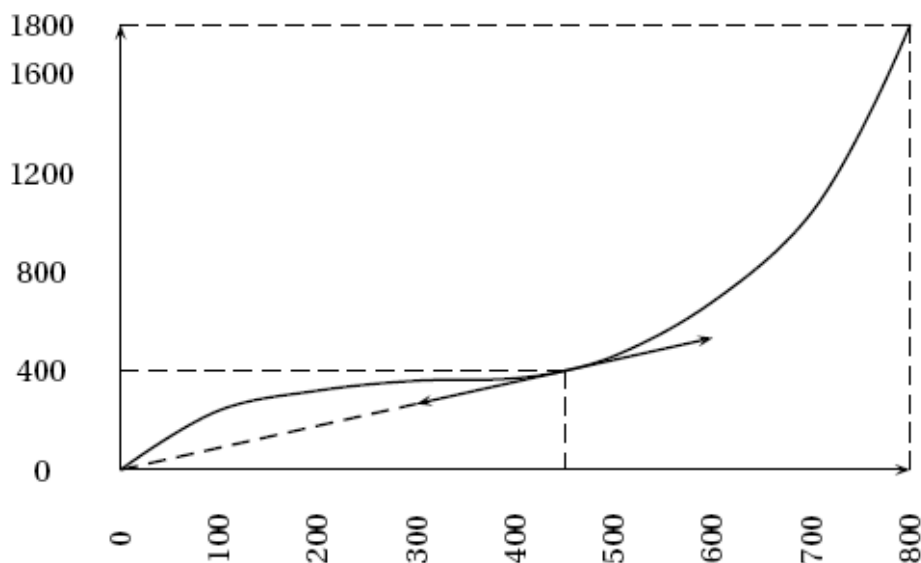
Une entreprise spécialisée produit deux types de détergents liquides qu'on nommera A et B pour simplifier.

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Partie A

La courbe ci-dessous représente le coût total de production du produit A en fonction de la quantité produite. On note x la quantité produite exprimée en litres et $C_T(x)$ le coût total exprimé en dollars, x variant de 0 à 800.

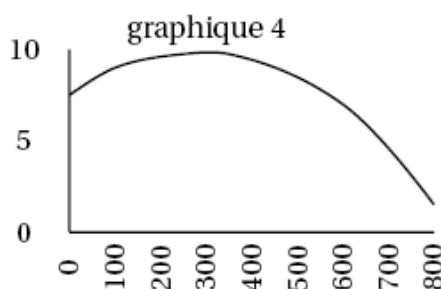
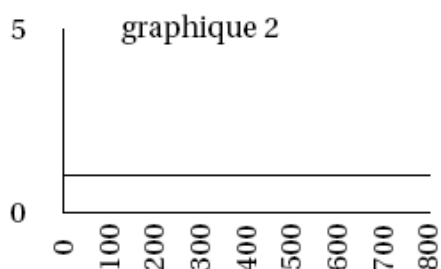
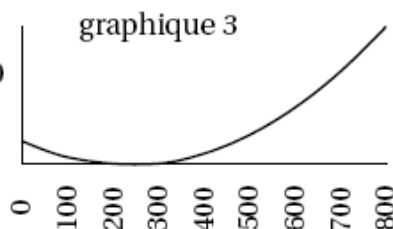
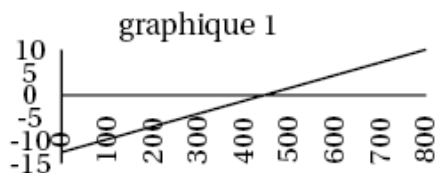
On notera que $C_T(0) = 0$, $C_T(450) = 400$, $C_T(800) = 800$ et que la tangente au point d'abscisse 450 passe par l'origine O du repère.



Répondre à la question suivante en utilisant les informations portées sur ce graphique.

Les économistes définissent le coût marginal comme le supplément de coût de production engendré par la production d'une unité supplémentaire. On considère qu'il peut être modélisé par la dérivée du coût total. Nous le noterons C_m .

Parmi les quatre graphiques (1, 2, 3 et 4) de la page suivante, un correspond au coût marginal associé à la production du détergent A. Lequel ? Justifier la réponse.



Partie B

Pour le détergent B, l'entreprise est en situation de monopole. Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par :

$$f(x) = 0,5x + \frac{8}{x}, \text{ où } x \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le coût moyen $f(x)$ est exprimé en milliers de dollars et la quantité produite x en hectolitres. On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan (unité graphique: 1 cm).

1) Étude de la fonction coût moyen

- Étudier le sens de variation de cette fonction sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- Déterminer les limites de $f(x)$ en 0 et $+\infty$.
- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 0,5x$ est asymptote à la courbe c . Étudier la position relative de c par rapport à (Δ) .
- Construire \mathcal{C} ainsi que (Δ) . (Utiliser une feuille de papier millimétré)

2) Seuils de rentabilité pour l'entreprise

L'entreprise ne peut être bénéficiaire que si le prix de vente de l'hectolitre est supérieur au coût moyen de fabrication.

Le prix de vente de l'hectolitre $p(x)$ est fonction de la quantité x vendue, et est défini par :
 $p(x) = -0,8x + 13$, où $p(x)$ est exprimé en milliers de dollars et x en hectolitres.

- On note \mathcal{P} la représentation graphique de la fonction p . Tracer \mathcal{P} dans le même repère que la question 1).
- Déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.
- Retrouver le résultat précédent par le calcul.

(On pourra se ramener à une inéquation du second degré).