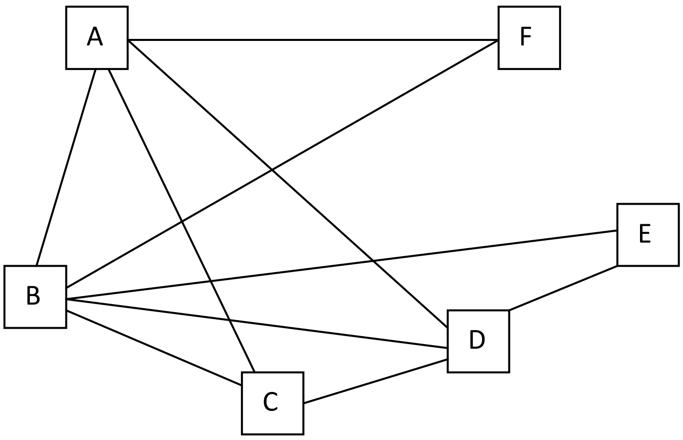
Exercice Liban 2007

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une grande ville a créé un jardin pédagogique sur le thème de l'écologie, jardin qui doit être visité par la suite par la majorité des classes de cette ville.
Ce jardin comporte six zones distinctes correspondant aux thèmes :

A. Eau	B. Économie d'énergies	C. Plantations et cultures locales
D. Développement durable	E. Biotechnologies	F. Contes d'ici (et d'ailleurs)

Ces zones sont reliées par des passages (portes) où sont proposés des questionnaires.
Le jardin et les portes sont représentés par le graphe ci-dessous (chaque porte et donc chaque questionnaire est représenté par une arête).



Question préliminaire :
Si un visiteur répond à tous les questionnaires, à combien de questionnaires aura-t-il répondu ?

Partie A

1. Donner la matrice G associée à ce graphe.
2. Le graphe est-il complet ? Est-il connexe ? Justifier.
3. Peut-on parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire :
   a) en commençant la visite par n'importe quelle zone ?
   b) en commençant la visite par la zone C (plantations et cultures) ? Dans ce cas, si la réponse est positive, quelle sera la dernière zone visitée.

(*Dans les deux cas, a et b, justifiez votre réponse*.)

Partie B

Pour illustrer chaque zone et présenter légendes et commentaires, les enfants ont décidé d'utiliser des supports de couleurs différentes.
Pour limiter le nombre de couleurs, on utilise des couleurs différentes seulement si les zones sont limitrophes (avec un passage entre les deux).

1. Donner et justifier un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
2. Déterminer alors en utilisant un algorithme adapté le nombre chromatique de ce graphe et proposer une répartition des couleurs.

Corrigé

Question préliminaire
D'après l'énoncé, chaque questionnaire est représenté par une arête or le nombre d'arêtes du graphe est 10. Donc si un visiteur répond à tous les questionnaires, il aura répondu à dix questionnaires.

Partie A

1. Avec les sommets classés dans l'ordre alphabétique, la matrice G associée à ce graphe est :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Les sommets E et F ne sont pas adjacents (il n'y a pas d'arête reliant les sommets E et F), donc le graphe n'est pas complet.

Il existe une chaîne reliant tous les sommets de ce graphe : A- F- B- C- D- E
Donc, le graphe est connexe.

3. Parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire revient à chercher une chaîne eulérienne.

Les degrés des différents sommets sont :

Sommets	A	B	C	D	E
Degré	4	5	3	2	2

Le graphe est connexe et a deux sommets de degré impair, alors d'après le théorème d'Euler, Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de ses sommets de degré impair est 0 ou 2. il existe une chaîne eulérienne. Il est donc possible de parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire.

a) Il y a deux sommets de degré impair, donc il n'existe pas de cycle eulérien et les extrémités de la chaîne sont les deux sommets de degré impair.
On ne peut pas commencer la visite par n'importe quelle zone.

b) Les extrémités de la chaîne eulérienne sont les deux sommets de degré impair.
En commençant la visite par la zone *C*, la visite se terminera par la zone *B*.

Partie B

1. Notons γ le nombre chromatique du graphe.
   - Le plus haut des degré des sommets est 5, alors $\gamma \leq 5+1$ soit $\gamma \leq 6$.
   - D'autre part, $\{A;B;C;D\}$ est un sous graphe complet d'ordre 4, alors $\gamma \geq 4$.

   Donc $4 \leq \gamma \leq 6$.

2. Utilisons l'algorithme de coloration de Welsh et Powell.

Les sommets sont classés par ordre de degré décroissant :

Sommets	**B**	**A**	**D**	**C**	**E**	**F**
Degré	**5**	**4**	**4**	**3**	**2**	**2**
Couleur	C1	C2	C3	C4	C2	C3

On attribue la couleur

- 1 pour le sommet B.
- 2 pour les sommets A et E.
- 3 pour les sommets D et F.
- 4 pour le sommet C.

Or $\gamma \geq 4$, et une coloration avec 4 couleurs est possible donc le nombre chromatique de ce graphe est égal à 4.