DEVOIR COMMUN N° 2	
Limites et comportement asymptotique, sens de variation, primitives, probabilité conditionnelle et logarithme népérien	***Le 30 janvier 2010***

Exercice 1

1) Si la fonction f est strictement croissante sur **R** alors l'équation $f(x)=0$ admet **au plus une solution**.

2) Si la fonction f est continue sur $[a\ ;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x)=0$ admet **au moins une solution**.

3) Après l'augmentation de 20 %, l'article coûte 600 €. En effet, $500\times\left(1+\frac{20}{100}\right)=600$.

Donc pour revenir au prix initial, il faut **diminuer le prix de 100 euros**.

4) On a : $f=2u+v$ avec $u(x)=\ln(x)$ et $v(x)=-3x+5$.

Alors : $f'=2u'+v'$ avec $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v'(x)=-3$. D'où : $f'(x)=\frac{2}{x}-3$, pour tout réel x strictement positif.

Or $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1, et $f'(1)=\frac{2}{1}-3=-1$. Donc une équation de la tangente la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $\boldsymbol{y=-x+3}$.

5) Cherchons l'ensemble de définition de h : $h(x)$ existe si $g(x)>0$.

D'après le tableau de variations de g, $g(5)<0$.

Par conséquent, **la fonction *h* n'est pas définie sur $[5\ ;7]$**.

6)
$$\begin{aligned}\frac{\ln 64}{\ln 2-\ln 8}+\frac{1}{2}\ln 9+\ln 3 &= \frac{\ln\left(2^6\right)}{\ln(2)-\ln\left(2^3\right)}+\frac{1}{2}\ln\left(3^2\right)+\ln(3)\\ &= \frac{6\ln(2)}{\ln(2)-3\ln(2)}+\frac{1}{2}\times 2\ln(3)+\ln(3)\\ &= \frac{6\ln(2)}{-2\ln(2)}+\ln(3)+\ln(3)=\mathbf{2\ln(3)-3}\end{aligned}$$

7) Posons $v(x)=x^2+2x+3$, alors $v'(x)=2x+2=2(x+1)$.

On obtient donc $u=\frac{1}{2}\times\frac{v'}{v}$. D'où une primitive de la fonction u est de la forme $\frac{1}{2}\ln(v)$.

Par conséquent, **une primitive *U* de *u* sur R est définie par $\boldsymbol{U(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)+4}$**.

8) $\lim\limits_{x\to 4}(-2x+1)=-7$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4} 8\\ \lim\limits_{x\to 4}(x-4)=0^+\end{array}\right\}\text{ d'où } \lim_{x\to 4}\left(\frac{8}{x-4}\right)=+\infty.$$
Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=-\infty$.

Donc $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote **la droite d'équation $x = 4$**.

9) $f(x)-(-2x+1)=-\dfrac{8}{x-4}$. Or $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 8 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-4)=+\infty\end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{8}{x-4}\right)=0$.

Par conséquent, la droite d'équation $y=-2x+1$ est **asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$**.

10) $f(x)=-2x+1-8\times\dfrac{1}{x-4}$.

Une primitive de $x\mapsto -2x+1$ sur **R** est $x\mapsto -x^2+x$.

Posons $u(x)=x-4$, alors $u'(x)=1$. D'où : $\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ et $u(x)>0$ pour tout x de

$]4\ ;\ +\infty[$. Or une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x-4}$ est $x\mapsto\ln(x-4)$.

Par conséquent, une primitive de f sur $]4\ ;\ +\infty[$ est la fonction F définie par

$\boldsymbol{F(x)=-x^2+x-8\ln(x-4)}$.

<u>Exercice 2</u>

1) a) La probabilité que l'élève soit un garçon est $p(\overline{F})$, c'est-à-dire $1-p(F)$

Or 60% des élèves sont des filles, d'où $p(F)=\dfrac{60}{100}=0,6$.

On en déduit que $p(\overline{F})=1-0,6=0,4$.

Donc, **la probabilité que l'élève soit un garçon est égale à 0,4**.

b) La probabilité que l'élève soit une fille qui fume est $p(F\cap A)$, c'est-à-dire $p(F)\times p_F(A)$.

Or 40 % des filles fument, alors $p_F(A)=\dfrac{40}{100}=0,4$. Par suite, $p(F\cap A)=0,6\times 0,4=0,24$.

Donc **la probabilité que l'élève soit une fille qui fume est égale à 0,24**.

c) La probabilité que l'élève soit un garçon qui fume est $p(\overline{F}\cap A)$, c'est-à-dire $p(\overline{F})\times p_{\overline{F}}(A)$

Or 30 % des garçons fument, alors $p_{\overline{F}}(A)=\dfrac{30}{100}=0,3$. Par suite, $p(\overline{F}\cap A)=0,4\times 0,3=0,12$

Donc **la probabilité que l'élève soit un garçon qui fume est égale à 0,12**.

2) Les événements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a : $p(A)=p(F\cap A)+p(\overline{F}\cap A)$.

D'après les questions précédentes, on obtient : $\boldsymbol{p(A)}=0,24+0,12\boldsymbol{=0,36}$.

3) Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument, alors

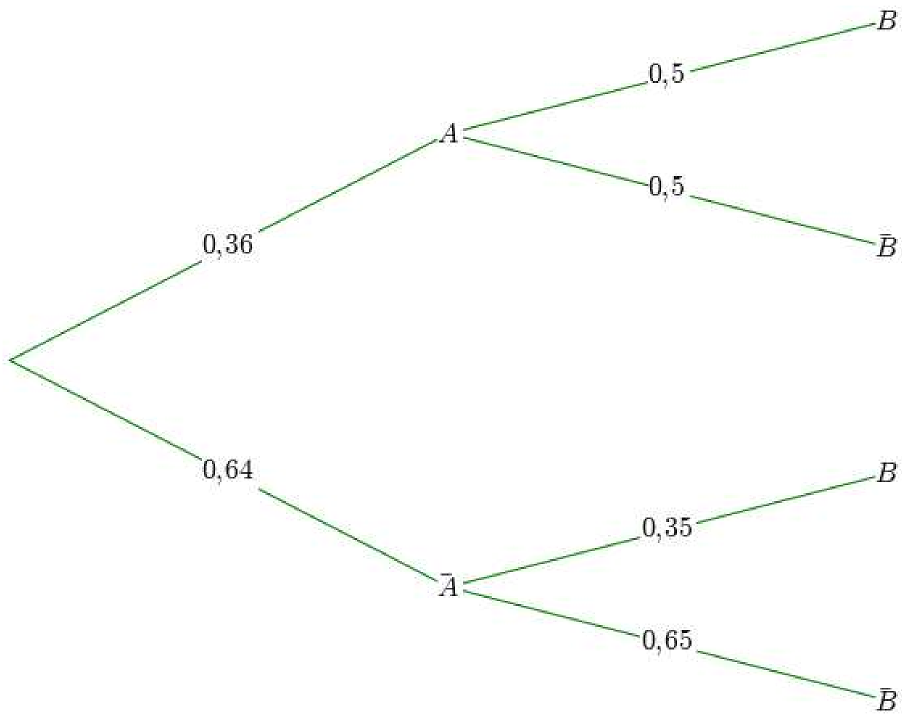
$p_A(B)=p_A(\overline{B})=\dfrac{1}{2}=0,5$.

Parmi les élèves non fumeurs, 65 % ont des parents non fumeurs ; alors $p_{\overline{A}}(\overline{B})=\dfrac{65}{100}=0,65$

Par suite, $p_{\overline{A}}(B)=1-0,65=0,35$.

Comme $p(A)=0,36$, alors $p(\overline{A})=1-0,36=0,64$.

On peut alors modéliser la situation par l'arbre pondéré suivant :



a) $\boldsymbol{p(A \cap B)} = p(A) \times p_A(B) = 0,36 \times 0,5 = \mathbf{0,18}$.

$\boldsymbol{p(\overline{A} \cap B)} = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B) = 0,64 \times 0,35 = \mathbf{0,224}$.

Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a : $\boldsymbol{p(B)} = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = 0,18 + 0,224 = \mathbf{0,404}$.

b) On recherche $p_B(A)$. Or $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,18}{0,404} \approx 0,446$.

La probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs est égale à 0,446.

c) On recherche $p_{\overline{B}}(A)$. Or $p_{\overline{B}}(A) = \dfrac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \dfrac{p(A) \times p_A(\overline{B})}{1 - p(B)} = \dfrac{0,36 \times 0,5}{0,596} \approx 0,302$.

La probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs est égale à 0,302.

d) **Il y a plus de chances qu'un élève fume si ses parents sont des fumeurs que s'ils ne l'étaient pas**.

<u>Exercice 3</u> *(Polynésie, juin 2006)*

1) a) Comme $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine O du repère, alors $\boldsymbol{f(0) = 0}$.

Comme $\mathscr{C}_f$ passe par $A(-1\,;\,0)$, alors $\boldsymbol{f(-1) = 0}$.

Comme la tangente à $\mathscr{C}_f$ en O a pour coefficient directeur $\ln(2)$, alors $\boldsymbol{f'(0) = \ln(2)}$.

Comme la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A admet pour équation $y = x + 1$, alors $\boldsymbol{f'(-1) = 1}$.

b) La tangente à $\mathscr{C}_f$ en O a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

D'après la question précédente, **une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en O est $y = x\,\ln(2)$**.

2) a) $\boldsymbol{f(0)} = (a \times 0^2 + b \times 0 + c)\ln(0 + 2) = \boldsymbol{c\,\ln(2)}$.

b) On remarque que $f = u \times \ln(v)$ avec $u(x) = ax^2 + bx + x$ et $v(x) = x + 2$.

Alors $f' = u' \times \ln(v) + u \times (\ln(v))' = u' \times \ln(v) + u \times \dfrac{v'}{v}$ avec $u'(x) = 2ax + b$ et $v'(x) = 1$.

D'où : $\boldsymbol{f'(x) = (2ax+b)\ln(x+2) + \dfrac{ax^2+bx+c}{x+2}}$ **, pour tout réel x de $]-2\,;+\infty[$** .

c) On en déduit que : $\boldsymbol{f'(0) = b\ \ln(2) + \dfrac{c}{2}}$ et $\boldsymbol{f'(-1)} = (-2a+b)\ln(1) + \dfrac{a-b+c}{1} \boldsymbol{= a - b + c}$ **.**

d) • Comme $f(0) = 0$ et que $f(0) = c\ln(2)$, alors $c\ln(2) = 0$. Par suite, $\boldsymbol{c = 0}$.

• Comme $f'(0) = \ln(2)$ et que $f'(0) = b\ln(2) + \dfrac{c}{2} = b\ln(2)$, alors $b\ \ln(2) = \ln(2)$.
Par suite, $\boldsymbol{b = 1}$.

• Comme $f'(-1) = 1$ et que $f'(-1) = a - b + c = a - 1$, alors $a - 1 = 1$. Par suite, $\boldsymbol{a = 2}$.

On en déduit que $\boldsymbol{f(x) = (2x^2 + x)\ln(x+2)}$.

<u>Exercice 4</u> *(Nouvelle-Calédonie, novembre 2009)*

Partie I : étude d'une fonction

1) $$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 5(1-\ln x)(\ln x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \text{ ou } \ln x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = 1 \text{ ou } \ln x = 2 \\ &\Leftrightarrow x = \mathrm{e} \text{ ou } x = \mathrm{e}^2 \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions : e et e^2 .

2) a)

X	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$1-X$		+	0	−		−	
$X-2$		−		−	0	+	
$5(1-X)(X-2)$		−	0	+	0	−	

b) On remarque que si l'on pose $X = \ln x$, on obtient $f(x) = 5(1-X)(X-2)$.
Or $X = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$ et $X = 2 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^2$.
On obtient alors, d'après la question précédente, le tableau suivant :

x	0		e		e^2		$+\infty$
signe de $f(x)$	‖	−	0	+	0	−	

3) a) On a : $f = 5(1-u)(u-2)$ avec $u(x) = \ln x$.

Alors $f' = 5\left[(1-u)'(u-2) + (1-u)(u-2)'\right] = 5\left[-u'(u-2) + (1-u)u'\right] = 5(-2uu' + 3u')$ avec $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.

D'où : $\boldsymbol{f'(x)} = 5\left(-2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)+3\times\frac{1}{x}\right) = \mathbf{5\left(\frac{3-2\ln(x)}{x}\right)}$, **pour tout x de $]0\,;+\infty[$.**

b) Comme $\frac{5}{x} > 0$, alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $3-2\ln(x)$.

$$3-2\ln(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 2\ln(x)=3 \;\Leftrightarrow\; \ln(x)=\frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; x=e^{\frac{3}{2}}$$

$$3-2\ln(x)<0 \;\Leftrightarrow\; -2\ln(x)<-3 \;\Leftrightarrow\; \ln(x)>\frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; x>e^{\frac{3}{2}}$$

$$3-2\ln(x)>0 \;\Leftrightarrow\; -2\ln(x)>-3 \;\Leftrightarrow\; \ln(x)<\frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; x<e^{\frac{3}{2}}$$

On en déduit que **la fonction f est strictement croissante sur $\left]0\,;\,e^{\frac{3}{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{3}{2}}\,;+\infty\right[$.**

Par suite, **la fonction f admet un maximum en $x=e^{\frac{3}{2}}$ et ce maximum est égal à**

$$\boldsymbol{f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)} = 5\left(1-\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)\left(\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)-2\right) = 5\left(1-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-2\right) = \mathbf{\frac{5}{4}}.$$

4) • Comme $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to 0}(1-\ln(x))=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x)-2)=-\infty$ (par somme de limites). Donc, par produit de limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$.

• Comme $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty}(1-\ln(x))=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln(x)-2)=+\infty$ (par somme de limites). Donc, par produit de limites, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty}$.

5) D'après les questions 3) et 4), on en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		α		$e^{\frac{3}{2}}$		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖		+		0		−		
f	‖	$-\infty$	1 ↗		$\frac{5}{4}$		↘ 1		$-\infty$

D'après le tableau de variations ci-dessus, on en déduit que **l'équation $f(x)=1$ admet donc deux solutions α et β.**

x	y1
3.57	0.9913
3.58	0.9976
3.59	1.0039
3.6	1.01
3.61	1.016
3.62	1.022
3.63	1.0278
3.64	1.0336
3.65	1.0393
3.66	1.0448
3.67	1.0503
3.68	1.0557
3.69	1.061
3.7	1.0663
3.71	1.0714

On en déduit que : $\boldsymbol{\alpha \approx 3{,}58}$

x	y1
5.53	1.0291
5.54	1.0252
5.55	1.0214
5.56	1.0175
5.57	1.0136
5.58	1.0097
5.59	1.0058
5.6	1.0018
5.61	0.9978
5.62	0.9938
5.63	0.9898
5.64	0.9857
5.65	0.9816
5.66	0.9775
5.67	0.9734

On en déduit que : $\boldsymbol{\beta \approx 5{,}60}$

Partie II : application

1) On recherche les réels x pour que $f(x)$ soit positive.

Or, d'après la question 2) b) de la ***partie I***, $f(x)$ est positive lorsque x appartient à l'intervalle $\left[\mathrm{e}\ ;\ \mathrm{e}^2\right]$. De plus, $\mathrm{e} \approx 2{,}718$ et $\mathrm{e}^2 \approx 7{,}389$.

Par conséquent, **l'entreprise doit produire entre 272 et 738 jouets afin de ne pas travailler à perte**.

Graphiquement, on cherche les abscisses des points de la courbe qui se situent au-dessus de l'axe des abscisses.

2) Comme l'entreprise veut réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 1 000 euros, alors on cherche les réels x tels que $f(x) \geq 1$.

D'après la question 5) de la ***partie I***, **cette entreprise doit fabriquer entre 359 et 560 jouets pour qu'elle puisse réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 1 000 euros**.