DEVOIR COMMUN N°2	
Limites et comportement asymptotique, sens de variation, primitives, probabilité conditionnelle et logarithme népérien	*Le 30 Janvier 2010*

COLLÈGE PROTESTANT FRANÇAIS

SPECIALITE

L'utilisation de la calculatrice est autorisée

Du papier millimétré est à la disposition des candidats

Ce sujet comporte pages numérotées de 1 à 6

On rappelle que toute communication entre les candidats est interdite. L'échange de matériel durant l'épreuve (papier millimétré, correcteur, rapporteur….) est notamment proscrit.

Le candidat devra traiter la totalité du présent sujet.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : *(5 points)*

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la bonne affirmation. Aucune justification n'est demandée.

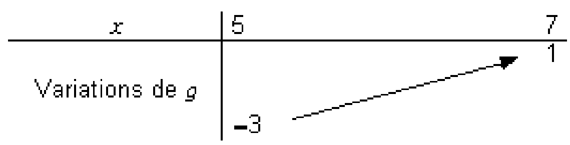
Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Si la fonction *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet :
   - ☐ Au moins une solution.
   - ☐ Au plus une solution.
   - ☐ Exactement une solution.
2. Si la fonction *f* est continue sur [*a*; *b*] et si *f* (*a*) et *f* (*b*) sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet :
   - ☐ Au moins une solution.
   - ☐ Au plus une solution.
   - ☐ Exactement une solution.

3. Un produit coûte initialement 500 euros. Son prix augmente de 20%. Si l'on veut revenir au prix initial, il faut :
   - ☐ Diminuer le prix de 20%.
   - ☐ Diminuer le prix de $\frac{1}{20}\%$.
   - ☐ Diminuer le prix de 100 euros.

4. Soit *f* la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = 2\ln x - 3x + 5$. Dans un repère une équation de la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 1 est :
   - ☐ $y = x - 1$
   - ☐ $y = 2x - 3$
   - ☐ $y = -x + 3$

5. On considère une fonction *g* dont le tableau de variations est donné ci-dessous. On pose $h = \ln g$.
   - ☐ *h* n'est pas définie sur [5 ; 7]
   - ☐ *h* est strictement décroissante sur [5 ; 7].
   - ☐ *h* est strictement croissante sur [5 ; 7].



6. $\dfrac{\ln 64}{\ln 2 - \ln 8} + \dfrac{1}{2}\ln 9 + \ln 3$ est égal à :
   - ☐ $3 + \dfrac{5}{3}\ln 3$

- ☐ $\dfrac{-9+5\ln 3}{3}$
- ☐ $\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{3}\ln 3$

7. u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ $par : u(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$. Une primitive U de u sur $\mathbb{R}$ est définie par :
   - ☐ $U(x)=\ln(x^2+2x+3)$
   - ☐ $U(x)=2\ln(x^2+2x+3)$
   - ☐ $U(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+4$

Soit f la fonction définie sur]4 ; +∞[par : $f(x)=-2x+1-\dfrac{8}{x-4}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

8. La courbe représentative de f admet pour asymptote :
   - ☐ la droite d'équation $y = 4$
   - ☐ la droite d'équation $x = 4$
   - ☐ la droite d'équation $y = 4x$

9. La droite d'équation y= -2x +1 est :
   - ☐ asymptote à la courbe $\mathcal{C}$
   - ☐ située en dessous de la courbe $\mathcal{C}$
   - ☐ tangente à la courbe $\mathcal{C}$

10. Une primitive de f sur]4 ; +∞[est la fonction F donnée par :
    - ☐ $F(x)=-x^2+x+8(x-4)^2$
    - ☐ $F(x)=-x^2+x+8\ln(x-4)$
    - ☐ $F(x)=-x^2+x-8\ln(x-4)$

Exercice 2 : *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice les probabilités seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} près.

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60% des élèves sont des filles. De plus, 40% des filles et 30% des garçons fument.

1) On choisit un élève au hasard. On note A l'évènement « l'élève choisi fume » et p(A) la probabilité de cet évènement. On note F l'évènement « l'élève choisi est une fille ».
   Quelle est la probabilité que :
   a) cet élève soit un garçon ?
   b) cet élève soit une fille qui fume ?
   c) cet élève soit un garçon qui fume ?

2) Déduire des questions précédentes, en le justifiant, que p(A) = 0,36.
3) L'enquête permet de savoir que :
   - parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
   - parmi les élèves non fumeurs, 65% ont des parents non fumeurs.

   On note B l'évènement « l'élève choisi a des parents fumeurs ».
   Dans cette question on pourra s'aider d'un arbre pondéré.
   a) Calculer les probabilités $p(A \cap B)$ et $p(\bar{A} \cap B)$. En déduire p(B).
   b) Calculer la probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.
   c) Calculer la probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.
   d) Quelle remarque amène la comparaison de ces deux résultats ?

Exercice 3 : *(5 points)*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.

1. Sur une feuille de papier millimétré construire un repère orthonormé (unité 1 cm), où l'axe des ordonnées est placé à gauche de la feuille.
   a. Dans ce repère, tracer les droites d'équations respectives $y = 0,85x + 1,8$ et $y = x$.
   b. Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses puis, en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3.
   On laissera apparents les traits de construction.
   c. À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 12$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 4 \times 0,85^n$.
   c. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Un magazine est vendu uniquement par abonnement. On a constaté que :
   - il y a 1 800 nouveaux abonnés chaque année ;
   - d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas.

   En 2008, il y avait 8 000 abonnés.
   a. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'abonnés en $(2008 + n)$.
   b. En utilisant la question 2. b., calculer une estimation du nombre d'abonnés en 2014.
   c. Déterminer à partir de quelle année le nombre d'abonnés dépassera les 12000.

Exercice 4 : *(6 points)*

PARTIE I : ÉTUDE D'UNE FONCTION

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle]0 ; +∞[telle que pour tout réel x de cet intervalle : $f(x) = 5(1 - \ln x)(\ln x - 2)$ et dont la représentation graphique est donnée en annexe 2.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Les valeurs exactes sont demandées.
2. a. Déterminer le signe de l'expression $5(1 - X)(X - 2)$ suivant les valeurs du réel X.

   b. En déduire que le signe de $f(x)$ est donné pour tout réel de l'intervalle]0 ; +∞[par le tableau suivant :

x	0		e		e^2		$+\infty$
Signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

3. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{5(3 - 2\ln x)}{x}$ pour tout x de l'intervalle]0 ; +∞[.

   b. En déduire les variations de f. On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.
4. Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
5. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ puis donner une valeur approchée arrondie à 0,01 près de ces solutions.

PARTIE II : APPLICATION

Une entreprise fabrique et revend des jouets.

$f(x)$ représente le résultat (bénéfice ou perte) en milliers d'euros qu'elle réalise lorsqu'elle fabrique x centaines de jouets, pour x compris entre 1 et 10, f désignant la fonction étudiée dans la partie I.

1. Déterminer, à un jouet près, les quantités à produire pour ne pas travailler à perte.
   Interpréter concrètement le résultat de la question I. 2. Comment le lit-on sur le graphique ?
2. Cette entreprise veut réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 1 000 euros. Combien de jouets doit-elle fabriquer ? Justifier la réponse.

ANNEXE

(À compléter et à rendre avec la copie)