Devoir Commun n°3			
Mathématiques	**Classe de TES**	**Durée 3 heures**	**Mai 2010**

COLLÈGE PROTESTANT FRANÇAIS

OBLIGATOIRE

L'utilisation de la calculatrice est autorisée

Du papier millimétré est à la disposition des candidats

Ce sujet comporte pages numérotées de 1 à 6

On rappelle que toute communication entre les candidats est interdite. L'échange de matériel durant l'épreuve (papier millimétré, correcteur, rapporteur….) est notamment proscrit.

Le candidat devra traiter la totalité du présent sujet.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre propositions de ce QCM, une et une seule des affirmations est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève et ne rapporte aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

Chacune des quatre propositions concerne une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [–5 ; 6], qui admet des primitives sur cet intervalle et dont on donne ci-dessous le tableau de variations :

x	-5		-4		2		4		6
Variations de f	3	↘	1	↗	4	↘	-2	↗	0

1. Si a et b sont deux réels tels que $2 < a < b < 4$, alors :
   a) $f(a) > f(b)$
   b) $f(a) < f(b)$
   c) on ne peut pas comparer $f(a)$ et $f(b)$.

2. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ est :
   a) 1
   b) 2
   c) 3

3.
   a) $\int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x < 0$
   b) $\int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x > 0$
   c) avec les données, on ne peut pas connaître le signe de $\int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

4. Si g est la fonction définie sur [–5 ; 6] par $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$, alors :
   a) l'équation $f(x) = g(x)$ n'a pas de solution
   b) l'équation $f(x) = g(x)$ a une unique solution
   c) on ne peut pas se prononcer sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = g(x)$

Exercice 2 : *(5 points)*

Élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On a relevé lors de six années consécutives le chiffre d'affaire d'une entreprise de prêt-à-porter de luxe créée en 2000. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année, x_i	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaire y_i (en euros)	160 000	220 000	290 000	390 000	540 000	730 000

1. Pour $i = 1, 2, \ldots, 5$ on pose $z_i = \ln y_i$.
   a) Recopier et compléter le tableau suivant (donner une valeur approchée arrondie à 10^{-2} près de chacun des résultats) :

x_i	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$						

   b) Représenter sur du papier millimétré le nuage de points associés à la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)$ dans un repère orthonormal du plan (unité : 2 cm en commençant à la graduation 10 sur l'axe des ordonnées).

   c) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (on obtiendra une équation de la forme $z = ax + b$ où les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-2} près).

   d) Déduire de ce qui précède une expression de y en fonction de x sous la forme $y = k\ \mathrm{e}^{ax}$, où k est un réel à déterminer et a le coefficient trouvé à la question précédente (le coefficient k sera arrondi à l'unité).

2. On note C la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $C(x) = 120\ 000\ \mathrm{e}^{0,3x}$.

   a) Résoudre par le calcul l'inéquation $C(x) \geq 2\ 000\ 000$.

   b) On admet que $C(x_i)$ représente le chiffre d'affaire de l'entreprise pour l'année de rang x_i.
   Quel chiffre d'affaire peut-on prévoir pour l'année 2008 (on arrondira le résultat au millier d'euros près) ?
   À partir de quelle année le chiffre d'affaire dépassera-t-il 2 millions d'euros ?

Exercice3 : *(5 points)*

Commun à tous les candidats

Une entreprise de transports routiers dispose de 16 camions dont

- 9 sont considérés comme « anciens »
- 4 sont considérés comme « récents »
- 3 sont considérés comme « neufs ».

PARTIE A

L'entreprise décide d'observer l'état des 16 camions pendant une période donnée.
On sait de plus que, pendant cette période, la probabilité que

- un camion « ancien » ait une panne, est égale à 0,08
- un camion « récent » ait une panne, est égale à 0,05
- un camion « neuf » ait une panne, est égale à 0,0025.

On choisit au hasard un camion parmi les 16.
On note les évènements suivants :

A : « le camion est ancien »
R : « le camion est récent »
N : « le camion est neuf »
D : « le camion a une panne ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant les éventualités associées au choix d'un camion.
2. Calculer la probabilité que le camion choisi soit récent et ait une panne (*on donnera, pour cette question et les deux suivantes, à chaque fois une valeur approchée du résultat arrondie à* 10^{-4} *près*).
3. Calculer la probabilité que le camion choisi ait une panne.
4. Calculer la probabilité que le camion soit neuf sachant qu'il n'a pas de panne.

PARTIE B

Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux camions « neufs ».
(*on donnera, pour chacune des questions suivantes, une valeur approchée du résultat arrondie au millième*).
Un camion peut être indisponible pour des raisons de matériel ou de personnel. Chaque camion neuf a de façon indépendante une probabilité d'indisponibilité de 0,01.
Déterminer la probabilité pour qu'un jour donné :

1. tous les camions « neufs » soient indisponibles (évènement T)
2. un camion « neuf » au moins soit indisponible (évènement M)
3. deux camions « neufs » exactement soient disponibles (évènement S).

Exercice 4 : *(6 points)*

La courbe (*C*) donnée en ANNEXE, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.

Les points *A* (3 ; e) et *B* (4 ; 2) appartiennent à cette courbe.

La tangente à la courbe en *A* est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente (*T*) à la courbe en *B* coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

PARTIE I : **lecture graphique**

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

1) Pour quelles valeurs du nombre réel *x* de l'intervalle [3 ;10] a-t-on $f(x) \leq 2$?
2) Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$.

PARTIE II : **étude de la fonction**

La fonction *f* représentée dans l'ANNEXE, est la fonction définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par $f(x) = (x-2)e^{(-x+4)}$.

1) a. Calculer $f(0)$. Donner la valeur décimale arrondie à l'unité.

   b. On donne $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

2) a. Pour tout nombre réel *x* de l'intervalle [0 ; +∞[, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3-x)e^{(-x+4)}$.

   b. Sur l'intervalle [0 ; +∞[étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction *f*.

3) On admet que la fonction *g* définie sur l'intervalle [0 ; + ∞[par $g(x) = (1-x)e^{(-x+4)}$ est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle [0 ; +∞[.

   En déduire la valeur moyenne *m* de *f* sur l'intervalle [2 ; 10] . On donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au millième.

Rappel : Soit *f* une fonction et [*a* ; *b*] un intervalle sur lequel *f* est définie et dérivable.

La valeur moyenne *m* de *f* sur un l'intervalle [*a* ; *b*] est le nombre *m* tel que :

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\, dx$$

PARTIE III : **étude d'un bénéfice**

Une entreprise vend *x* centaines de litres de parfum par jour $1,8 \leq x \leq 4,5$.

Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend *x* centaines de litres est donné par *f* (*x*) pour $x \in [1,8;4,5]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 180 litres et au plus 450 litres.

1) Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres (soit 4 centaines de litres).
2) Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à 1 €).

   À partir de quelle quantité journalière l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

Annexe de l’exercice IV