

Devoir Commun n°3

Mathématiques

Classe de TES

Durée 3 heures

Mai 2010



C O L L È G E
P R O T E S T A N T
F R A N Ç A I S

SPECIALITÉ

L'utilisation de la calculatrice est autorisée

Du papier millimétré est à la disposition des candidats

Ce sujet comporte pages numérotées de 1 à 6

On rappelle que toute communication entre les candidats est interdite. L'échange de matériel durant l'épreuve (papier millimétré, correcteur, rapporteur....) est notamment proscrit.

Le candidat devra traiter la totalité du présent sujet.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre propositions de ce QCM, une et une seule des affirmations est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'enlève et ne rapporte aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

Chacune des quatre propositions concerne une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5 ; 6]$, qui admet des primitives sur cet intervalle et dont on donne ci-dessous le tableau de variations :

x	-5	-4	2	4	6
Variations de f	3		4		0
		1		-2	

- Si a et b sont deux réels tels que $2 < a < b < 4$, alors :
 - $f(a) > f(b)$
 - $f(a) < f(b)$
 - on ne peut pas comparer $f(a)$ et $f(b)$.
- Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ est :
 - 1
 - 2
 - 3
- $\int_4^5 f(x) dx < 0$
 - $\int_4^5 f(x) dx > 0$
 - avec les données, on ne peut pas connaître le signe de $\int_4^5 f(x) dx$
- Si g est la fonction définie sur $[-5 ; 6]$ par $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$, alors :
 - l'équation $f(x) = g(x)$ n'a pas de solution
 - l'équation $f(x) = g(x)$ a une unique solution
 - on ne peut pas se prononcer sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = g(x)$

Exercice 2 : (5 points)

Elèves ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une entreprise fabrique des savons et des bougies parfumées en quantités respectives x et y exprimées en tonnes. Le coût total de production z , exprimé en milliers d'euros, est donné par la relation $z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$ avec $x \in [0;6]$ et $y \in [0;8]$

1. La surface S représentant le coût en fonction de x et de y dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donnée sur la feuille annexe 1, figure 1. L'annexe 1 sera rendue complétée avec la copie.
 - a) Le point $A(3 ; 2 ; 3)$ appartient-il à la surface S ? Justifier.
 - b) Placer, sur la figure 1, le point B d'abscisse 5 et d'ordonnée 2 qui appartient à S .
 - c) Soit $y = 2$. Exprimer alors z sous la forme $z = f(x)$ puis donner la nature de la section de la surface S par le plan d'équation $y = 2$ en justifiant.

2. La fabrication de x tonnes de savons et de y tonnes de bougies parfumées engendre la contrainte : $x + y = 5$.
 - a) Quelle est la nature de l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$?
 - b) Vérifier que, sous la contrainte $x + y = 5$, z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$ avec $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$.
 - c) Déterminer la valeur de x pour laquelle g admet un minimum puis la valeur de y et le coût de production z qui correspondent.
On note C le point de la surface S qui correspond à ce coût minimum.
 - d) On donne sur la feuille annexe 1, figure 2, la projection orthogonale de la surface S sur le plan (xOy) (« vue de dessus de la surface S »).
Construire sur cette figure 2, la projection orthogonale sur le plan (xOy) des points dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$.
Placer sur cette figure 2 le point C_1 , projeté orthogonal du point C sur le plan (xOy) .

FIGURE 1

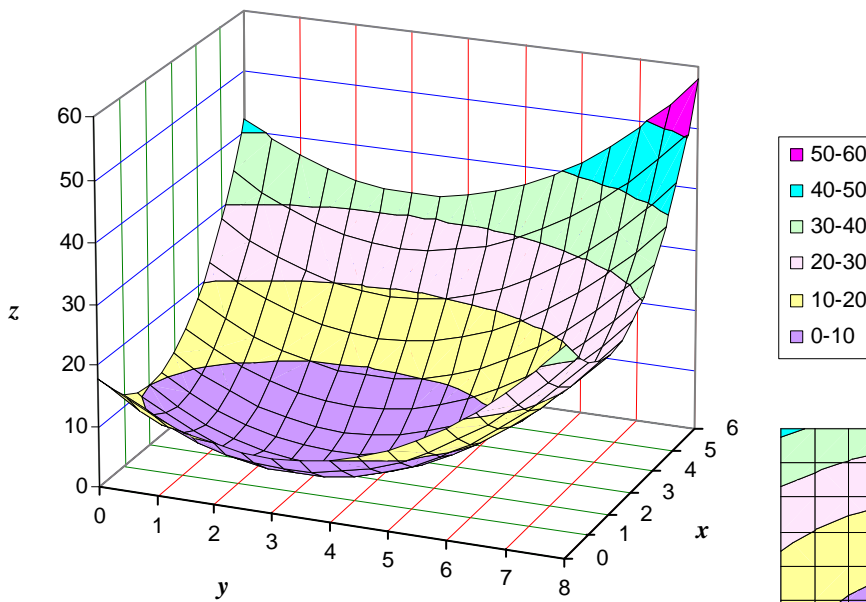
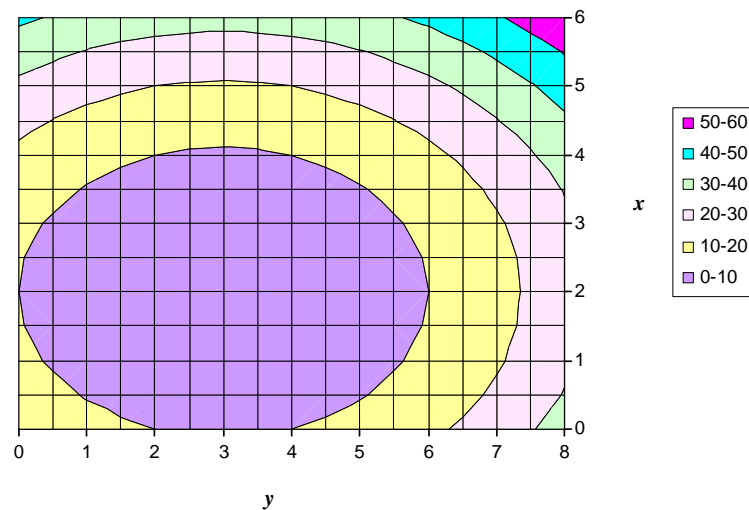


FIGURE 2



Exercice3 : (5 points)

Commun à tous les candidats

Une entreprise de transports routiers dispose de 16 camions dont

- 9 sont considérés comme « anciens »
- 4 sont considérés comme « récents »
- 3 sont considérés comme « neufs ».

PARTIE A

L'entreprise décide d'observer l'état des 16 camions pendant une période donnée.

On sait de plus que, pendant cette période, la probabilité que

- un camion « ancien » ait une panne, est égale à 0,08
- un camion « récent » ait une panne, est égale à 0,05
- un camion « neuf » ait une panne, est égale à 0,0025.

On choisit au hasard un camion parmi les 16.

On note les évènements suivants :

A : « le camion est ancien »

R : « le camion est récent »

N : « le camion est neuf »

D : « le camion a une panne ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant les éventualités associées au choix d'un camion.
2. Calculer la probabilité que le camion choisi soit récent et ait une panne (*on donnera, pour cette question et les deux suivantes, à chaque fois une valeur approchée du résultat arrondie à 10^{-4} près*).
3. Calculer la probabilité que le camion choisi ait une panne.
4. Calculer la probabilité que le camion soit neuf sachant qu'il n'a pas de panne.

PARTIE B

Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux camions « neufs ».

(on donnera, pour chacune des questions suivantes, une valeur approchée du résultat arrondie au millième).

Un camion peut être indisponible pour des raisons de matériel ou de personnel. Chaque camion neuf a de façon indépendante une probabilité d'indisponibilité de 0,01.

Déterminer la probabilité pour qu'un jour donné :

1. tous les camions « neufs » soient indisponibles (évènement T)
2. un camion « neuf » au moins soit indisponible (évènement M)
3. deux camions « neufs » exactement soient disponibles (évènement S).

Exercice 4 : (6 points)

La courbe (C) donnée en ANNEXE, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} . On note f' sa fonction dérivée.

Les points $A(3; e)$ et $B(4; 2)$ appartiennent à cette courbe.

La tangente à la courbe en A est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente (T) à la courbe en B coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

PARTIE I : lecture graphique

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

- 1) Pour quelles valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[3; 10]$ a-t-on $f(x) \leq 2$?
- 2) Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$.

PARTIE II : étude de la fonction

La fonction f représentée dans l'ANNEXE, est la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = (x-2)e^{(-x+4)}$.

- 1) a. Calculer $f(0)$. Donner la valeur décimale arrondie à l'unité.
b. On donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
- 2) a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3-x)e^{(-x+4)}$.
b. Sur l'intervalle $[0; +\infty[$ étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f .
- 3) On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = (1-x)e^{(-x+4)}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
En déduire la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[2; 10]$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au millième.

Rappel : Soit f une fonction et $[a; b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.

La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a; b]$ est le nombre m tel que :

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx$$

PARTIE III : étude d'un bénéfice

Une entreprise vend x centaines de litres de parfum par jour $1,8 \leq x \leq 4,5$.

Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend x centaines de litres est donné par $f(x)$ pour $x \in [1,8; 4,5]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 180 litres et au plus 450 litres.

- 1) Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres (soit 4 centaines de litres).
- 2) Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à 1 €).
À partir de quelle quantité journalière l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

Annexe de l'exercice IV

