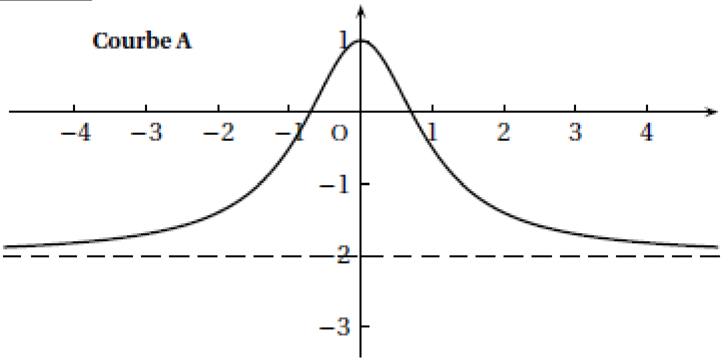
CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Limites et second degré	*Le 28 septembre 2009*

<u>Exercice 1</u>

1)

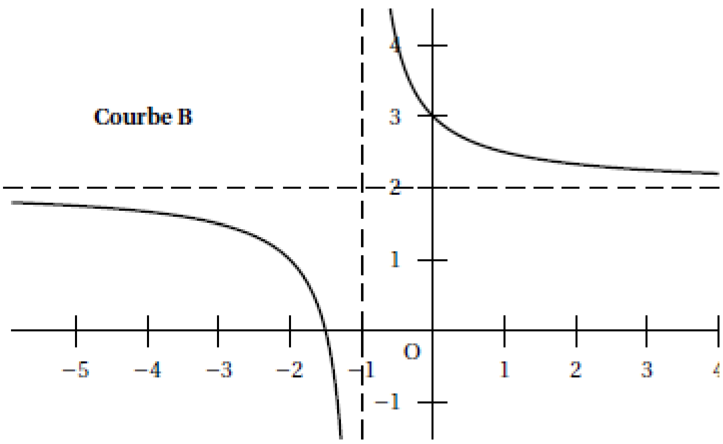


$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$.

En effet, **la courbe A admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$.**

2)



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

En effet, **la courbe B admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.**

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x<-1}} f(x) = -\infty$.

En effet, **la courbe B admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.**

<u>Exercice 2</u>

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-3x^2-x^5\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^5\right) = +\infty$ (règle du monôme de plus haut degré).

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+5}{x^2-4}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = \mathbf{2}$ (règle du quotient des monômes de plus haut degré).

3) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x<1}} 5 = 5\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\ x<1}}\left(4-x^2\right) = 3\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ x<1}}\left(\dfrac{5}{4-x^2}\right) = \dfrac{5}{3}$ (par quotient des limites).

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-7x^2}{x+5}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-7x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-7x) = -\infty$ (règle du quotient des monômes de plus haut degré).

C. Lainé

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^3+4}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ (règle du quotient des monômes de plus haut degré).

6) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}}(-5)=-5\\ \lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}}\left(6x^2-7x-5\right)=0^-\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}}\left(\dfrac{-5}{6x^2-7x-5}\right)=+\infty$ (par quotient des limites).

En effet, $\Delta=49+120=169$; comme $\Delta>0$, alors l'expression $6x^2-7x-5$ admet deux racines :

$x_1=\dfrac{7-13}{12}=-\dfrac{6}{12}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{7+13}{12}=\dfrac{20}{12}=\dfrac{5}{3}$. On obtient alors le signe de l'expression $6x^2-7x-5$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$6x^2-7x-5$		+	0	–	0	+	

Exercice 3

1) a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}1=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(4-2x)=-\infty\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4-2x}\right)=0$, par quotient des limites.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty$; par conséquent, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$, par somme de limites.

b) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to2\\ x>2}}1=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\ x>2}}(4-2x)=0^-\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ x>2}}\left(\dfrac{1}{4-2x}\right)=-\infty$, par quotient des limites.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ x>2}}(1-2x)=-3$; par conséquent, $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to2\\ x>2}}f(x)=-\infty}$, par somme de limites.

On en déduit que **la droite d'équation $x=2$ est asymptote à $\mathscr{C}$**.

c) Soit un réel x de $]2\,;\,+\infty[$. $f(x)-(1-2x)=\dfrac{1}{4-2x}$.

Or d'après la question 1) a), $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4-2x}\right)=0$; par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(1-2x)\right)=0$.

Par conséquent, **la courbe $\mathscr{C}$ admet une deuxième asymptote d'équation $y=1-2x$**.

2) $$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\dfrac{2x+3}{x^2-4}}{1-2x+\dfrac{1}{4-2x}}=\frac{\dfrac{2x+3}{(x-2)(x+2)}}{1-2x+\dfrac{1}{2(2-x)}}=\frac{\dfrac{2x+3}{(x-2)(x+2)}}{\dfrac{4-2x-8x+4x^2+1}{2(2-x)}}=\frac{\dfrac{2x+3}{(x-2)(x+2)}}{\dfrac{4x^2-10x+5}{2(2-x)}}$$

Alors $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\dfrac{2x+3}{(x-2)(x+2)}}{\dfrac{4x^2-10x+5}{-2(x-2)}}=\dfrac{2x+3}{x+2}\times\dfrac{-2}{4x^2-10x+5}=\dfrac{-2(2x+3)}{(x+2)(4x^2-10x+5)}$, pour tout x de $]2\,;\,+\infty[$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x^2}$ (d'après la règle des quotients de monôme de plus haut degré).

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$; par conséquent, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)=0}$.