CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Limites et dérivation	*Le 19 octobre 2009*

<u>Exercice 1</u>

1) On a $f = 6u - v$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Alors $f' = 6u' - v'$ avec $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc $\boldsymbol{f'(x) = -\dfrac{6}{x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$**, pour tout x de $\mathbf{I}$.**

2) On a $g = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x^2 + x - 4$ et $v(x) = 2x^2 - x + 5$.

Alors $g' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 6x + 1$ et $v(x) = 4x - 1$. Donc :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(6x+1)(2x^2 - x + 5) - (3x^2 + x - 4)(4x-1)}{(2x^2 - x + 5)^2} \\ &= \frac{(12x^3 - 6x^2 + 30x + 2x^2 - x + 5) - (12x^3 - 3x^2 + 4x^2 - x - 16x + 4)}{(2x^2 - x + 5)^2} \\ &= \frac{12x^3 - 4x^2 + 29x + 5 - 12x^3 - x^2 + x + 17x - 4}{(2x^2 - x + 5)^2} \\ &= \frac{-5x^2 + 46x + 1}{(2x^2 - x + 5)^2} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boldsymbol{g'(x) = \dfrac{-5x^2 + 46x + 1}{(2x^2 - x + 5)^2}}$**, pour tout x de $\mathbf{I}$.**

3) On a $h = \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = 3x^2 - 3x + 2$.

Alors $h' = \dfrac{-v'}{v^2}$ avec $v'(x) = 6x - 3$. Donc : $h'(x) = \dfrac{-(6x-3)}{(3x^2 - 3x + 2)^2}$

Par conséquent, $\boldsymbol{h'(x) = \dfrac{-3(2x-1)}{(3x^2 - 3x + 2)^2}}$ **, pour tout x de $\mathbf{I}$.**

4) On a $m = uv$ avec $u(x) = 3x^2 + 2$ et $v(x) = 2x - \sqrt{x}$.

Alors $m' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = 6x$ et $v'(x) = 2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc $\boldsymbol{m'(x) = 6x\left(2x - \sqrt{x}\right) + \left(3x^2 + 2\right)\left(2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}$**, pour tout x de $\mathbf{I}$.**

C. Lainé

Exercice 2

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} (3x+4) = -3+4 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \left(-x^2+2\right) = -1+2 = 1$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)$, alors la fonction f est continue en $\mathbf{-1}$.

Exercice 3

1) $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Or cette tangente est la droite (AB) par hypothèse. D'où $\boldsymbol{f'(1)} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-0}{1-(-1)} \mathbf{=} \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$.

2) D'après l'allure de $\mathscr{C}_f$, on en déduit les variations de la fonction *f*, puis le signe de la dérivée f'.

x	0		1		6
f	0	↗	5	↘	
f'		+	0	–	

La courbe représentant la fonction f' doit alors être au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0\,;\,1]$ et en dessous de l'axe des abscisses sur $[1\,;\,6]$.

On peut donc rejeter la courbe C_3.

De plus, $f'(1) = 2{,}5$. **La courbe représentant $\boldsymbol{f'}$ est alors la courbe $\boldsymbol{C_1}$.**

Exercice 4 *(Asie, juin 2005)*

1) $ax+b+\dfrac{c}{x-3} = \dfrac{(ax+b)(x-3)+c}{x-3} = \dfrac{ax^2-3ax+bx-3b+c}{x-3} = \dfrac{ax^2+(-3a+b)x-3b+c}{x-3}$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} a=-1 \\ -3a+b=5 \\ -3b+c=-15 \end{cases}$.

Or $\begin{cases} a=-1 \\ -3a+b=5 \\ -3b+c=-15 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a=-1 \\ b=5+3a=5-3=2 \\ c=-15+3b=-15+6=-9 \end{cases}$.

Par conséquent, **pour tout $\boldsymbol{x}$ de $\left]3\,;+\infty\right[$, $\boldsymbol{f(x) = -x+2-\dfrac{9}{x-3}}$**.

2) a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x-3) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \left(-\dfrac{9}{X}\right) = 0 \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} \text{donc, } \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{9}{x-3}\right) = 0 \\ \text{de plus, } \lim\limits_{x\to+\infty} (-x+2) = -\infty \end{array}\right\}$; par conséquent, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x-3) = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to 0^+} \left(-\dfrac{9}{X}\right) = -\infty \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} \text{donc, } \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \left(-\dfrac{9}{x-3}\right) = -\infty \\ \text{de plus, } \lim\limits_{x\to 3} (-x+2) = 1 \end{array}\right\}$; par conséquent, $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = -\infty}$.

b) D'après la question précédente, on en déduit que **la courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = 3$ comme asymptote verticale**.

2) a) Pour tout réel x de $]3 ; +\infty[$, $f(x) - (-x+2) = -\dfrac{9}{x-3}$.

Or, d'après la question 1) a), $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\dfrac{9}{x-3}\right) = 0$.

Par conséquent, **la droite (Δ) d'équation $y = -x+2$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$**.

b) Pour tout réel x de $]3 ; +\infty[$, posons $g(x) = f(x) - (-x+2) = -\dfrac{9}{x-3}$.

Comme – 9 est toujours négatif et que $x-3$ est strictement positif sur $]3 ; +\infty[$, alors $g(x) < 0$ pour tout x de $]3 ; +\infty[$.

Par conséquent, **$\mathscr{C}_f$ est en dessous de (Δ) sur $]3 ;+\infty[$**.

3) a) $f = u - \dfrac{9}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = -x+2 \\ v(x) = x-3 \end{cases}$, donc $f' = u' - \left(-\dfrac{9v'}{v^2}\right) = u' + \dfrac{9v'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.

Donc pour tout réel x de $]3 ; +\infty[$,

$$f'(x) = -1 + \frac{9}{(x-3)^2} = \frac{-(x-3)^2+9}{(x-3)^2} = \frac{3^2-(x-3)^2}{(x-3)^2} = \frac{(3+x-3)(3-x+3)}{(x-3)^2}.$$

Par conséquent, **pour tout réel x de $]3 ;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x(-x+6)}{(x-3)^2}$**.

Cherchons le signe de $f'(x)$:

$f'(x) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = 6$.

Pour tout réel x de $]3 ; +\infty[$, $(x-3)^2 > 0$ et $x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $(-x+6)$.

Par conséquent, **la fonction f est strictement décroissante sur $[6 ; +\infty[$ et strictement croissante sur $]3 ; 6]$**.

b)

x	3		6		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-\infty$

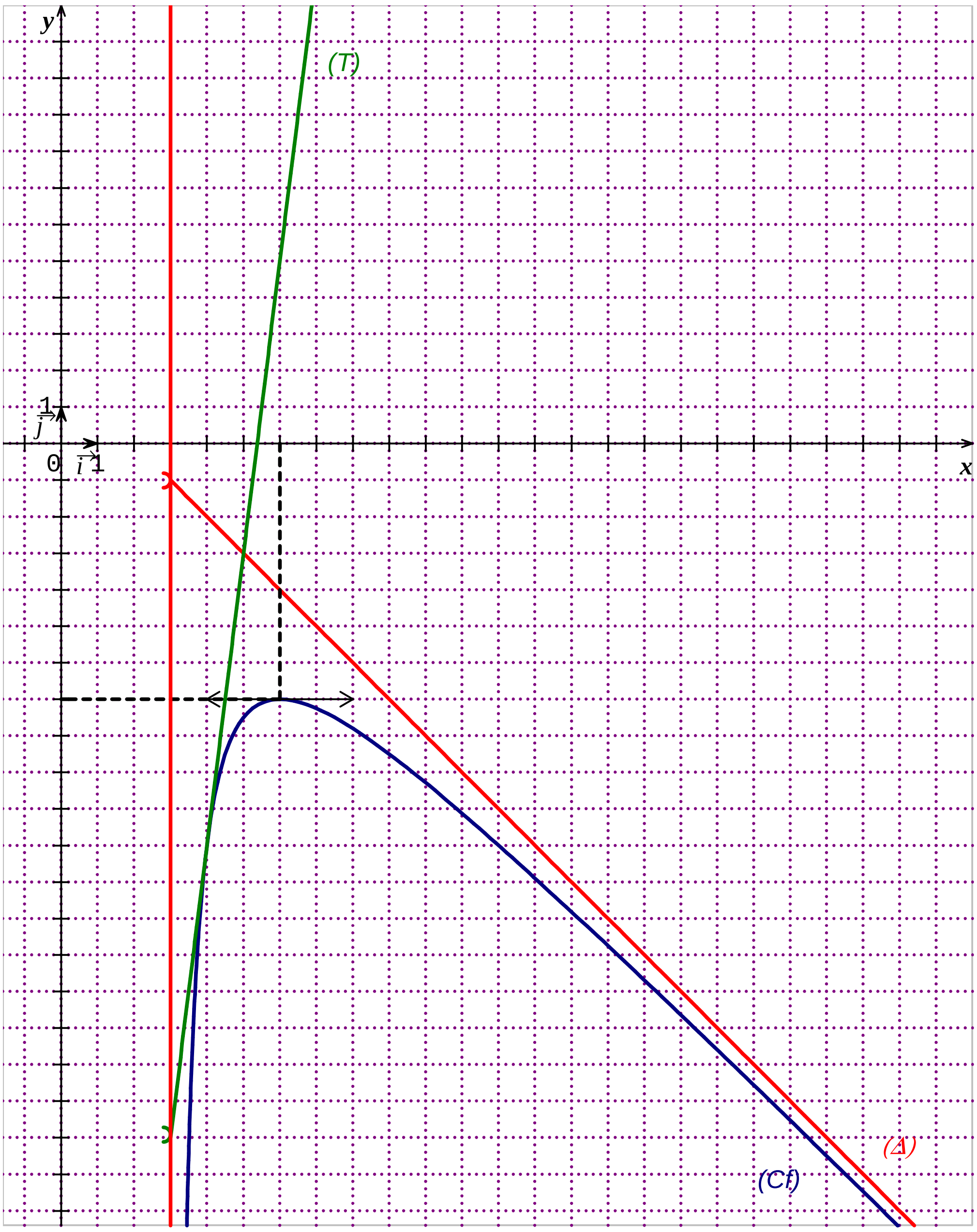
4) a) (T) a pour équation $y = f'(4)(x-4) + f(4)$.

Or $f'(4) = \dfrac{4\times(-4+6)}{(4-3)^2} = \dfrac{8}{1} = 8$ et $f(4) = -4+2-\dfrac{9}{4-3} = -2-9 = -11$.

D'où $y = 8(x-4) - 11 = 8x - 43$.

Par conséquent, **(T) a pour équation $y = 8x - 43$**.

b)



6) a) D'après le tableau de variations de la question 3) b), la fonction f est continue et strictement croissante sur $[4\ ;\ 6]$. De plus, $f(4) = -4 + 2 - \dfrac{9}{4-3} = -11$ et $f(6) = -7$; alors $-8 \in [f(4)\ ;\ f(6)]$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $\boldsymbol{f(x) = -8}$ **admet une unique solution** $\boldsymbol{\alpha}$ **dans** $\boldsymbol{[4\ ;6]}$.

b) En utilisant la calculatrice, on obtient : $\boldsymbol{4{,}6 < \alpha < 4{,}7}$. (Voir le tableau page suivante).

x	*f(x)*
4	-11
4,1	-10,28
4,2	-9,7
4,3	-9,223
4,4	-8,829
4,5	-8,5
4,6	**-8,225**
4,7	**-7,994**
4,8	-7,8
4,9	-7,637
5	-7,5
5,1	-7,386
5,2	-7,291
5,3	-7,213
5,4	-7,15
5,5	-7,1
5,6	-7,062
5,7	-7,033
5,8	-7,014
5,9	-7,003
6	-7