

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

Primitives

Le 7 décembre 2009

Exercice 1

1) a)

x	0	1	3,5
$g(x)$	0	2	1,125

b) • $g'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à (C_g) au point d'abscisse 0.

$$\text{Alors } g'(0) = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{2}{0,5} = 4.$$

• $g'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à (C_g) au point d'abscisse 1. Or celle-ci est parallèle à l'axe des abscisses, donc $g'(1) = 0$.

c) **Les coordonnées du point C sont (1,75 ; 1,75)** ; en effet, on voit que C appartient à la droite d'équation $y = x$.

2) Soit G la primitive de g sur $[0 ; 3,5]$ qui s'annule en 0.

On en déduit que, pour tout x de $[0 ; 3,5]$, $G'(x) = g(x)$.

Or, d'après la question 1) a), on peut remarquer que $g(x)$ est supérieur ou égal à 0 pour tout x de $[0 ; 3,5]$.

Alors, **G est strictement croissante sur $[0 ; 3,5]$.**

On peut alors éliminer la courbe n°3.

Comme $G'(0) = g(0) = 0$, alors **la courbe (C_G) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.**

Par conséquent, **la représentation graphique de (C_G) est la courbe n°2.**

Exercice 2

1) Une primitive sur \mathbf{R} de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto \frac{1}{4}x^4$.

Une primitive sur \mathbf{R} de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \frac{1}{3}x^3$.

Une primitive sur \mathbf{R} de $x \mapsto 1$ est $x \mapsto x$.

Une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ est $x \mapsto \frac{1}{-3+1} \times x^{-3+1} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2}$.

D'où **les primitives de f sur \mathbf{R} sont les fonctions F définies par**

$F(x) = 25 \times \frac{1}{4}x^4 - 12 \times \frac{1}{3}x^3 + x - \left(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2}\right) + k = \frac{25}{4}x^4 - 4x^3 + x + \frac{1}{2x^2} + k$, où k est un réel.

2) Pour tout réel x , $g(x) = \frac{7x^3 + x^2 - 1}{x^2} = \frac{7x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 7x + 1 - \frac{1}{x^2}$.

Une primitive sur $]0; +\infty[$ de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$.

Une primitive sur $]0; +\infty[$ de $x \mapsto 1$ est $x \mapsto x$.

Une primitive sur $]0; +\infty[$ de $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$.

D'où **les primitives de g sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions G définies par**

$$G(x) = 7 \times \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x} + k = \frac{7}{2}x^2 + x - \frac{1}{x} + k, \text{ où } k \text{ est un réel.}$$

3) Posons $u(x) = x^2 - 2x + 3$, alors $u'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$.

D'où $l(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$. Or une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

Par conséquent, **les primitives L de la fonction l sur \mathbb{R} sont définies par**

$$L(x) = 2\sqrt{x^2 - 2x + 3} + k.$$

4) On peut écrire $h(x)$ sous la forme : $h(x) = \frac{3x}{(1+x^2)^2} = 3x(1+x^2)^{-2}$

Posons $u(x) = 1 + x^2$, alors $u'(x) = 2x$. D'où $h(x) = 3x(1+x^2)^{-2} = \frac{3}{2}u'(x)[u(x)]^{-2}$.

Or une primitive de $u'u^{-2}$ est $\frac{1}{-2+1}u^{-2+1} = -\frac{1}{u}$.

Par conséquent, **les primitives de h sur \mathbb{R} sont les fonctions H définies par**

$$H(x) = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{1+x^2} + k, \text{ où } k \text{ est un nombre réel.}$$

5) Posons $u(x) = x^2 - 4x$, alors $u'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$.

D'où $m(x) = \frac{1}{2}u'(x)[u(x)]^3$. Or une primitive de $u'u^3$ est $\frac{1}{3+1}u^{3+1} = \frac{1}{4}u^4$.

Par conséquent, **les primitives de m sur \mathbb{R} sont les fonctions M définies par**

$$M(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}(x^2 - 4x)^4 + k = \frac{1}{8}x(x^2 - 4x) + k, \text{ où } k \text{ est un nombre réel.}$$

Exercice 3

• On a $F = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $v(x) = x + 1$.

Alors $F' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2x + 1$ et $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } F'(x) &= \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + x + 1 - x^2 - x - 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Donc, $F'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$, pour tout x de \mathbb{I} .

• On a $G = u + \frac{1}{v}$ avec $u(x) = x - 2$ et $v(x) = x + 1$.

Alors $G' = u' - \frac{v'}{v^2}$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } G'(x) &= 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Donc, $G'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = F'(x)$, pour tout x de \mathbb{I} .

Par conséquent, **F et G sont deux primitives sur $]-1; +\infty[$ d'une même fonction f**

définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.

Remarque : Au lieu de dériver la fonction G , on aurait pu montrer que F et G diffèrent d'une constante.

En effet, pour tout x de $]-1; +\infty[$,

$$F(x) - G(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x+1} - \left(x - 2 + \frac{1}{x+1} \right) = \frac{x^2 + x + 1}{x+1} - \frac{x^2 - 2x + x - 2 + 1}{x+1} = \frac{2x + 2}{x+1} = 2.$$

Exercice 4

1) $\triangleright \frac{1}{(x-1)^3} = (x-1)^{-3}$. Posons $u(x) = x - 1$, alors $u'(x) = 1$. D'où $\frac{1}{(x-1)^3} = u'(x) \times u^{-3}(x)$.

Alors **une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^3}$ sur \mathbb{I} est $x \mapsto \frac{1}{-3+1} u^{-3+1}(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)^2}$.**

$\triangleright \frac{1}{(x-1)^4} = (x-1)^{-4}$. D'où $\frac{1}{(x-1)^4} = u'(x) \times u^{-4}(x)$.

Alors **une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^4}$ sur \mathbb{I} est $x \mapsto \frac{1}{-4+1} u^{-4+1}(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{(x-1)^3}$.**

2) a) $\frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^4} = \frac{a(x-1) + b}{(x-1)^4} = \frac{ax + (b-a)}{(x-1)^4}$, pour tout réel x de \mathbb{I} .

Par identification, $\begin{cases} a=1 \\ b-a=0 \end{cases}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} a=1 \\ b=a=1 \end{cases}$.

Par conséquent, **pour tout réel x de \mathbb{I} , $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4}$.**

b) D'après les questions 1) et 2) a), on en déduit que **les primitives de f sur I sont définies par $x \mapsto -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{(x-1)^3} + k$ où k est une constante réelle.**

c) $F(2) = 0$ équivaut à $-\frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{3} \times 1 + k = 0$, c'est-à-dire $k = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Par conséquent, **la primitive de F de f sur I telle que $F(2) = 0$ est définie par**

$$F(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + \frac{5}{6}.$$