CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Probabilités conditionnelles et fonction logarithme népérien	***Le 11 janvier 2010***

<u>Exercice 1</u>

1) Les événements B et N forment une partition de l'univers Ω.

Alors $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{N}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{45}{100} \boldsymbol{= 0,55}$.

2) Comme 70 % des parties jouées avec les blancs ont été gagnantes, alors $p_B(V) = 0,7$.

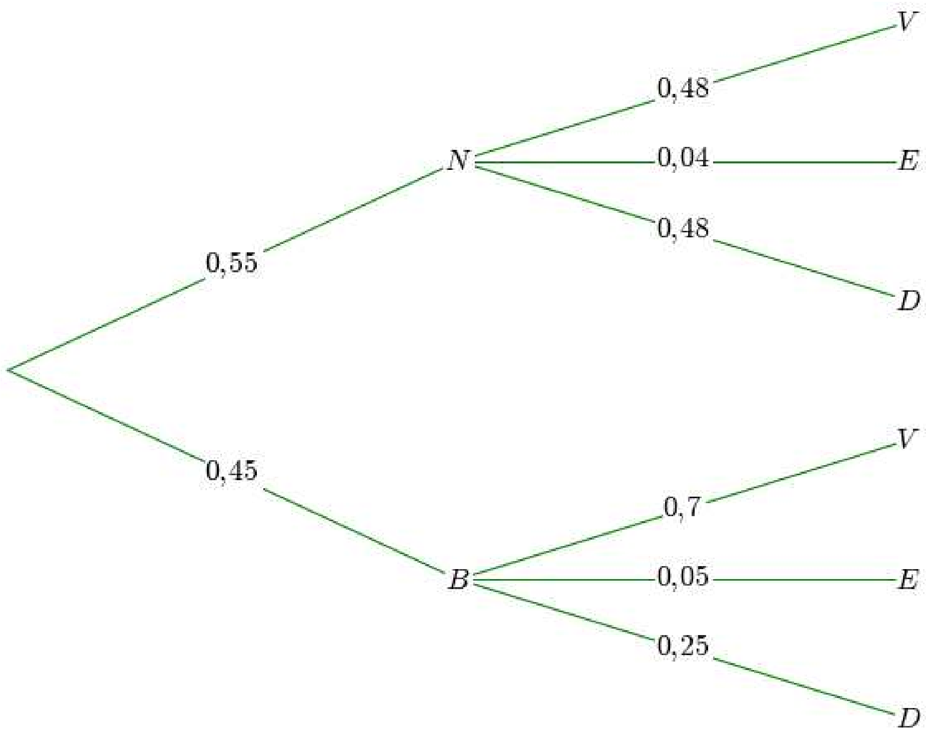
Comme 25 % des parties jouées avec les blancs ont été perdantes, alors $p_B(D) = 0,25$.

On en déduit que $p_B(E) = 1 - 0,7 - 0,25 = 0,05$.

Comme 4 % des parties jouées avec les noirs ont fini par un nul, alors $p_N(E) = 0,04$.

Comme il y a eu autant de parties gagnées que perdues pour les parties jouées avec les noirs, alors $p_N(V) = p_N(D)$. Alors $p_N(V) = p_N(D) = \frac{1 - 0,04}{2} = 0,48$.

On en déduit l'arbre pondéré :



3) On recherche $p(N \cap V)$. Or $p(N \cap V) = p(N) \times p_N(V) = 0,55 \times 0,48 = 0,264$.

Par conséquent, **la probabilité de l'évènement « La partie choisie est jouée avec les noirs et est gagnée » est égale à 0,264**.

4) On recherche $p(V)$. Les événements B et N forment une partition de l'univers Ω. D'après la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{aligned} p(V) = p(N \cap V) + p(B \cap V) &= 0,264 + p(B) \times p_B(V) \\ &= 0,264 + 0,45 \times 0,7 \\ &= 0,579 \end{aligned}$$

Par conséquent, **la probabilité que la partie choisie se termine par une victoire est égale à 0,579**.

5) On recherche $p_V(N)$. Or $p_V(N)=\dfrac{p(N\cap V)}{p(V)}=\dfrac{0,264}{0,579}\approx 0,456$.

La probabilité que la partie ait été jouée avec les noirs sachant qu'elle se termine par une victoire est égale à 0,456 (au millième près).

Exercice 2

1)

Nombre d'ouvrages consultés \ Fréquentation	Au moins une fois par semaine	Moins d'une fois par semaine	**Totaux**
Un ouvrage	81	90 – 81 = 9	90
De deux à cinq ouvrages	375 – 81 – 225 = 69	20	69 + 20 = 89
Plus de cinq ouvrages	225	125 – 20 – 9 = 96	225 + 96 = 321
Totaux	500 – 125 = 375	125	500

• 18% des élèves consultent un seul ouvrage par visite ; il y en a donc : $500\times\dfrac{18}{100}=90$.

Parmi ceux-ci, 90% viennent au moins une fois par semaine ; il y en a donc : $90\times\dfrac{90}{100}=81$.

• 16% des élèves venant moins d'une fois par semaine, consultent entre deux et cinq ouvrages par visite ; il y en a donc : $125\times\dfrac{16}{100}=20$.

• 45% des élèves viennent au moins une fois par semaine et consultent chaque fois plus de cinq ouvrages ; il y en a donc : $500\times\dfrac{45}{100}=225$.

2) $\boldsymbol{p(A)}=\dfrac{375}{500}=\dfrac{75}{100}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}=0,75}$; $\boldsymbol{p(B)}=\dfrac{89}{500}=\boldsymbol{0,178}$;

$\boldsymbol{p(C)}=\dfrac{89+321}{500}=\dfrac{410}{500}=\boldsymbol{\dfrac{41}{50}=0,82}$; $\boldsymbol{p(D)}=\boldsymbol{\dfrac{69}{500}=0,138}$;

$\boldsymbol{p(A\cup B)}=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(D)=0,75+0,178-0,138=\boldsymbol{\dfrac{79}{100}=0,79}$

3) a) On cherche à calculer $p_A(B)$. D'où : $\boldsymbol{p_A(B)}=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}=\dfrac{69}{375}=\boldsymbol{\dfrac{23}{125}=0,184}$

b) On cherche à calculer $p_B(A)$. $\boldsymbol{p_B(A)}=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{69}{89}\approx\boldsymbol{0,775}$

Exercice 3

1) • On cherche les réels x tels que $x+2>0$ et $2x+1>0$.

Or $x+2>0$ équivaut à $x>-2$ et $2x+1>0$ équivaut à $x>-\dfrac{1}{2}$.

Donc l'intervalle d'étude est $\mathrm{I} = \left]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

- $\ln(x+2) = \ln(2x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x+2 = 2x+1$

$\Leftrightarrow \quad -x = -1$

$\Leftrightarrow \quad x = 1$

Comme 1 appartient à I, alors **l'ensemble des solutions de cette équation est $\{1\}$**.

2) ● On cherche les réels x tels que $x > 0$ et $x+1 > 0$.
Or $x+1 > 0$ équivaut à $x > -1$. Donc l'intervalle d'étude est $\mathrm{I} =]0\ ;\ +\infty[$.

- $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln[x(x+1)] = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$

Calculons le discriminant de ce trinôme : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3$.

Alors ce trinôme admet deux racines : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Comme $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ appartient à I et que $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ n'appartient pas à I, alors **l'ensemble des solutions de cette équation est $\left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}$**.

3) ● On cherche les réels x tels que $x+2 > 0$.
Or $x+2 > 0$ équivaut à $x > -2$. Donc l'intervalle d'étude est $\mathrm{I} =]-2\ ;\ +\infty[$.

- $\ln(x+2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x+2) > \ln(1)$

$\Leftrightarrow \quad x+2 > 1$

$\Leftrightarrow \quad x > -1$

Alors **l'ensemble des solutions de cette équation est $]-1\ ;+\infty[$**.

4) ● On cherche les réels x tels que $2x+2 > 0$ et $1-x > 0$.
Or $2x+2 > 0$ équivaut à $x > -1$ et $1-x > 0$ équivaut à $x < 1$.
Donc l'intervalle d'étude est $\mathrm{I} =]-1\ ;\ 1[$.

- $\ln(2x+2) > \ln(1-x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x+2 > 1-x$

$\Leftrightarrow \quad 3x > -1$

$\Leftrightarrow \quad x > -\frac{1}{3}$

Alors **l'ensemble des solutions de cette équation est $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ 1\right[$**.

Exercice 4

1) Si $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-1}{x}$, alors une primitive F de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ est définie par :	A. $F(x)=\dfrac{\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x}{\frac{x^2}{2}}$ B. $F(x)=x^2+5x+\ln x-1$ C. $F(x)=x^2+5x-\ln x+1$ D. $F(x)=\dfrac{(4x+5)\times x-(2x^2+5x-1)}{x^2}$
2) Si x et y sont des réels strictement positifs, alors :	A. $\dfrac{\ln x}{\ln y}=\ln(x-y)$ B. $\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}\right)=\ln x-0{,}5\ \ln y$ C. $\ln(x+y)=\ln(xy)$ D. $\ln(x^2-y)=2\ \ln x-\ln y$
3) $\ln(16e^2)-2\ \ln(8\sqrt{e})=$	A. $1-2\ \ln 2$ B. $\ln(4e)$ C. $16\ \ln e^2-16\ \ln\sqrt{e}$ D. $1+\ln 2$