

DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

Probabilités et fonction exponentielle

Le 15 mars 2010

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

Chaque question comporte trois affirmations repérées par les lettres a, b, c.

Indiquer pour chacune d'elles, sur la copie et sans justification, l'affirmation exacte en indiquant la lettre correspondante. Il n'y a qu'une affirmation exacte par question.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 0,5 point et une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1) Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par : $f(x) = 2e^{-x} + x + 5$. Dans un repère, une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est :

a) $y = -x + 7$


b) $y = 3x + 7$

c) $y = 7x - 1$

2) On considère une fonction g dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

On pose $h(x) = e^{g(x)}$.

x	5	7
$g(x)$	-3	1



a) h n'est pas définie sur $[5 ; 7]$;

b) h est strictement décroissante sur $[5 ; 7]$;

c) h est strictement croissante sur $[5 ; 7]$.

3) L'ensemble des solutions de la double inéquation $-1 < e^x < 8$ est l'intervalle :

a) $]0 ; 3\ln 2[$

b) $] -\infty ; 3\ln 2[$

c) $] \ln 8 ; +\infty[$

4) m est la fonction définie sur \mathbf{R} par : $m(x) = (2x + 3)e^{2x^2 + 6x + 1}$. Une primitive M de m sur \mathbf{R} est définie par :

a) $M(x) = 2e^{2x^2 + 6x + 1} - 1$

b) $M(x) = \frac{1}{2}e^{2x^2 + 6x + 1} + 3$

c) $M(x) = (x^2 + 3x)e^{2x^2 + 6x + 1}$

Exercice 2 (3 points)

Le tableau suivant donne l'évolution de la population de l'Inde de 1951 à 1991.

année	1951	1961	1971	1981	1991
rang x_i	1	2	3	4	5
population y_i (en millions)	361	439	548	683	846
z_i					

On cherche à étudier l'évolution de la population y , exprimée en millions d'habitants, en fonction du rang x de l'année.

On cherche un ajustement et on se propose d'utiliser le changement de variable suivant : $z = \ln y$.

- 1) Compléter la dernière ligne (les valeurs seront arrondies au millième).
- 2) À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de z en fonction de x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au millième).
- 3) En déduire qu'une approximation de la population y , exprimée en millions d'habitants, en fonction du rang x de l'année est donnée par : $y \approx 289 e^{0,215x}$.
- 4) En utilisant cet ajustement, calculer la population que l'on pouvait prévoir pour 2001 (le résultat sera arrondi au million).

Exercice 3 (3 points)

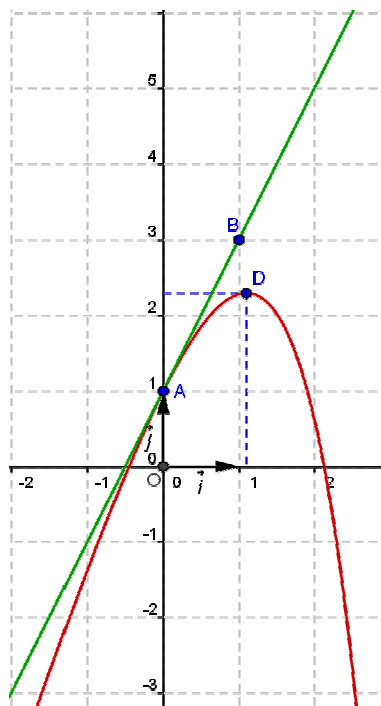
Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{-e^x}{e^x - 3}$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère du plan.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g .
- 2) Résoudre, dans D_g , l'équation $g(x) = 1$.
- 3) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Exercice 4 (5 points)

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 3]$ par $f(x) = ae^x + bx + c$ où a, b et c sont des réels fixés.

Une partie de la courbe \mathcal{C} représentative de f est représentée ci-dessous :



On dispose des renseignements suivants :

- \mathcal{C} passe par $A(0 ; 1)$.
- B est le point de coordonnées $(1 ; 3)$; la droite (AB) est tangente à \mathcal{C} au point A .
- \mathcal{C} admet une tangente horizontale au point D d'abscisse $\ln(3)$.

- 1) On désigne par f' la dérivée de la fonction f . Traduire les renseignements précédents par trois égalités utilisant f ou f' .
- 2) En résolvant un système, déterminer a, b et c .

3) On admet à partir de maintenant que $f(x) = -e^x + 3x + 2$.

a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[-2 ; 3]$.

b) Montrer que f s'annule exactement une fois sur $[-2 ; \ln(3)]$ en un réel α .

Donner une valeur approchée au centième près de α .

Exercice 4 (5 points)

Dans un laboratoire, se trouve un atelier nommé « L'école des souris ». Dès leur plus jeune âge, les souris apprennent à effectuer régulièrement le même parcours. Ce parcours est constitué de trappes et de tunnels que les souris doivent emprunter pour parvenir à croquer une friandise. Plus la souris effectue le parcours, plus elle va vite.

Une souris est dite « performante » lorsqu'elle parvient à effectuer le parcours en moins d'une minute.

Cette « école » élève des souris entraînées par trois dresseurs : 48 % des souris sont entraînées par Claude, 16 % par Dominique et les autres par Éric.

Après deux mois d'entraînement, on sait que :

- parmi les souris de Claude 60 % sont performantes ;
- 20 % des souris de Dominique ne sont pas encore performantes ;
- parmi les souris d'Éric, deux sur trois sont performantes.

On choisit au hasard une souris de cette « école ».

On note C , D , E et P les événements suivants :

- C : « la souris est entraînée par Claude » ;
- D : « la souris est entraînée par Dominique » ;
- E : « la souris est entraînée par Éric » ;
- P : « la souris est performante ».

1) a) Déterminer $p(C)$, $p(E)$, $p_D(\bar{P})$ et $p_E(P)$.

b) Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Déterminer la probabilité de l'évènement « la souris est entraînée par Claude et est performante ».

3) Démontrer que la probabilité pour une souris d'être performante est de 0,656.

Pour les questions suivantes, on arrondira les résultats au millième.

4) On choisit au hasard une souris parmi celles qui sont performantes.

Quelle est la probabilité que cette souris soit entraînée par Dominique ?

5) *Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte.*

On choisit maintenant au hasard quatre souris de cette « école ».

On assimile ce choix à un tirage avec remise.

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une souris performante ?