CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 8

Probabilités et fonction exponentielle	*Le 15 mars 2010*

Exercice 1

1) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est $f'(0)$. Or $f = 2e^u + v$ avec $u(x) = -x$ et $v(x) = x + 5$.

D'où $f' = 2u'e^u + v'$ avec $u'(x) = -1$ et $v'(x) = 1$.

On en déduit que $f'(x) = -2e^{-x} + 1$, et par suite, $f'(0) = -2e^0 + 1 = -2 + 1 = -1$.

Par conséquent, le résultat correct est le **a)**.

2) On remarque que $h = e^g$. On en déduit que les variations de h sont les mêmes que celles de g sur $\mathscr{D}_g$. Par conséquent, le résultat correct est le **c)**.

3) $-1 < e^x < 8$ équivaut à $e^x < 8$ car $e^x > 0$.

Or $e^x < 8$ équivaut à $x < \ln(8)$, c'est-à-dire à $x < 3\ln(2)$ $\left(\text{car } \ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2)\right)$.

Par conséquent, le résultat correct est le **b)**.

4) Si on pose $u(x) = 2x^2 + 6x + 1$, on obtient $u'(x) = 4x + 6 = 2(2x + 3)$.

D'où $m(x) = (2x+3)e^{2x^2+6x+1} = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$.

Or une primitive de $u'e^u$ sur $\mathscr{D}_u$ est e^u ; par suite, les primitives de m sur **R** sont les fonctions M définies par $M(x) = \frac{1}{2}e^{2x^2+6x+1} + k$ où k est une constante réelle.

Par conséquent, le résultat correct est le **b)**.

Exercice 2 *(Polynésie, septembre 2008)*

1)

année	1951	1961	1971	1981	1991
rang x_i	1	2	3	4	5
population y_i (en millions)	361	439	548	683	846
z_i	**5,889**	**6,084**	**6,306**	**6,526**	**6,741**

2) **À l'aide de la calculatrice, la droite d'ajustement affine de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, est : $z = 0{,}215x + 5{,}665$**.

3) $z = \ln y$ équivaut à $e^z = y$; alors $y = e^{0{,}215x+5{,}665}$ d'après la question précédente.

Or $e^{0{,}215x+5{,}665} = e^{0{,}215x} \times e^{5{,}665}$ et $e^{5{,}665} \approx 289$.

Par conséquent, **une approximation de la population y, exprimée en millions d'habitants, en fonction du rang x de l'année est donnée par : $y \approx 289\ e^{0{,}215x}$**.

4) En 2001, le rang de l'année est 6 ; remplaçons x par 6 dans l'expression précédente. On obtient : $289 \times e^{0{,}215\times 6} \approx 1050$.

Avec ce nouvel ajustement, on peut estimer qu'en 2001, la population serait d'environ 1050 millions.

Exercice 3

1) $g(x)$ existe lorsque $\mathrm{e}^x - 3$ est différent de 0.

Or $\mathrm{e}^x - 3 = 0$ équivaut à $\mathrm{e}^x = 3$, c'est-à-dire à $x = \ln(3)$.

Par conséquent, **l'ensemble de définition D_g de la fonction g est $\mathbb{R} - \{\ln(3)\}$**.

2) $g(x) = 1$ équivaut à $\dfrac{-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 3} = 1$, c'est-à-dire à $-\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x - 3$.

Or $-\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x - 3$ équivaut à $\mathrm{e}^x = \dfrac{3}{2}$, ou encore à $x = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

Par conséquent, **l'équation $g(x) = 1$ a pour solution $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$**.

3) $g(x) = h(\mathrm{e}^x)$ où h est la fonction définie par $h(t) = \dfrac{-t}{t-3}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{-t}{t} = \lim\limits_{t \to +\infty} (-1) = -1$, alors d'après la limite d'une fonction composée, $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1}$.

Autre méthode : $g(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 3} = \dfrac{-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{3}{\mathrm{e}^x}\right)} = \dfrac{-1}{1 - \dfrac{3}{\mathrm{e}^x}}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{\mathrm{e}^x} = 0$ (par quotient de limites).

D'où, par somme de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{3}{\mathrm{e}^x}\right) = 1$. Donc $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1}$ (par quotient de limites).

Exercice 4 *(Antilles-Guyane, septembre 2009)*

1) ● $\mathscr{C}$ passe par $A(0\,;1)$. Alors $f(0) = 1$, c'est-à-dire $\boldsymbol{a + c = 1}$.

● La droite (AB) est tangente à $\mathscr{C}$ au point A. Alors $f'(0)$ est le coefficient directeur de la droite (AB).

Or $f'(x) = a\mathrm{e}^x + b$ et $m_{(AB)} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-1}{1-0} = 2$. D'où : $\boldsymbol{a + b = 2}$.

● $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point D d'abscisse $\ln(3)$. Alors $f'(\ln(3)) = 0$, c'est-à-dire $a\mathrm{e}^{\ln(3)} + b = 0$. D'où : $\boldsymbol{3a + b = 0}$.

2) On est amené à résoudre le système $\begin{cases} a + c = 1 \\ a + b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$.

Or $\begin{cases} a + c = 1 \\ a + b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} c = 1 - a \\ b = 2 - a \\ 3a + (2 - a) = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} c = 1 - a \\ b = 2 - a \\ 2a = -2 \end{cases}$.

D'où $\begin{cases} a + c = 1 \\ a + b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = -1 \\ c = 1 - (-1) = 2 \\ b = 2 - (-1) = 3 \end{cases}$.

Par conséquent, **pour tout x de $[-2\,;3]$, $f(x)=-e^{x}+3x+2$**.

3) a) D'après la question 1), $f'(x)=ae^{x}+b$. Alors, d'après la question précédente, $f'(x)=-e^{x}+3$. Or :

$$-e^{x}+3=0 \iff e^{x}=3 \iff x=\ln(3)$$
$$-e^{x}+3<0 \iff e^{x}>3 \iff x>\ln(3)$$
$$-e^{x}+3>0 \iff e^{x}<3 \iff x<\ln(3)$$

La fonction f est strictement croissante sur $[-2\,;\ln(3)]$ et strictement décroissante sur $[\ln(3);3]$.

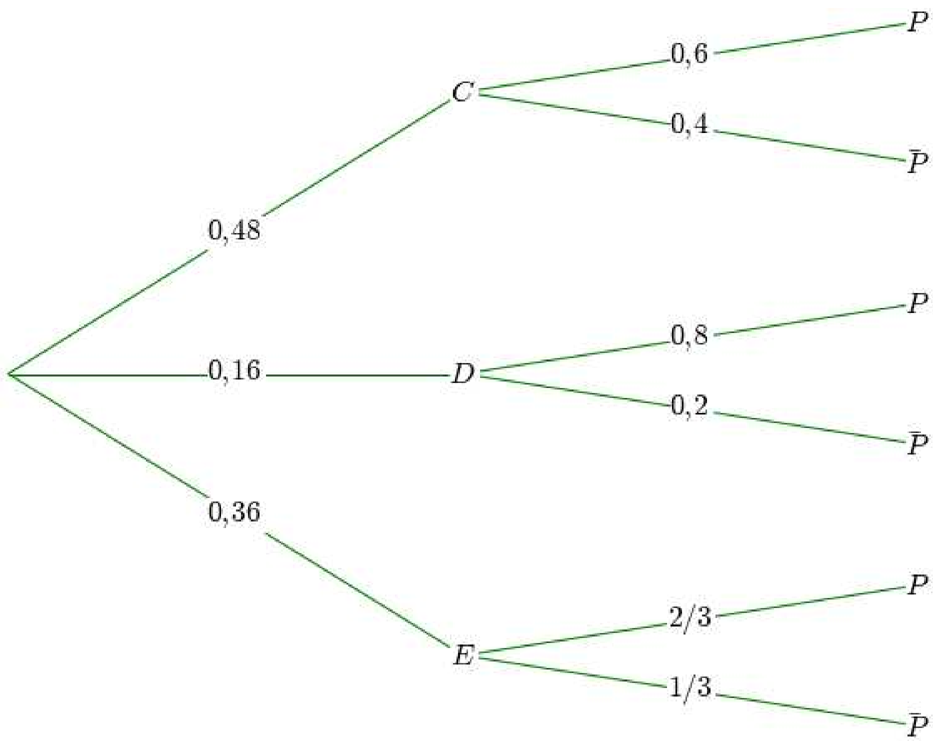
b) Comme la fonction f est continue et strictement croissante sur $[-2\,;\ \ln(3)]$, que $f(-2)=-e^{-2}-4<0$ et que $f(\ln(3))=-e^{\ln(3)}+3\ln(3)+2=-3+3\ln(3)+2=-1+3\ln(3)>0$, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, **l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[-2\,;\ln(3)]$.**
D'après la calculatrice, $\alpha\approx -0,46$.

<u>**Exercice 5**</u> *(Polynésie, juin 2009)*
1) a) 48 % des souris sont entraînées par Claude ; alors $p(C)=0,48$.
16 % des souris sont entraînées par Dominique ; alors $p(D)=0,16$.
D'où $p(E)=1-p(C)-p(D)=1-0,48-0,16=\mathbf{0,36}$.
Comme 20 % des souris de Dominique ne sont pas encore performantes, alors $p_D(\overline{P})=0,20$.

Parmi les souris d'Éric, deux sur trois sont performantes, alors $p_E(P)=\dfrac{2}{3}$.

Parmi les souris de Claude 60 % sont performantes, alors $p_C(P)=0,60$.

b)



2) On recherche $p(C \cap P)$. Or $p(C \cap P) = p(C) \times p_C(P) = 0,48 \times 0,6 = 0,288$.

La probabilité de l'évènement « la souris est entraînée par Claude et est performante » est égale à 0,288.

3) On recherche $p(P)$. Comme les événements C, D et E forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on obtient :

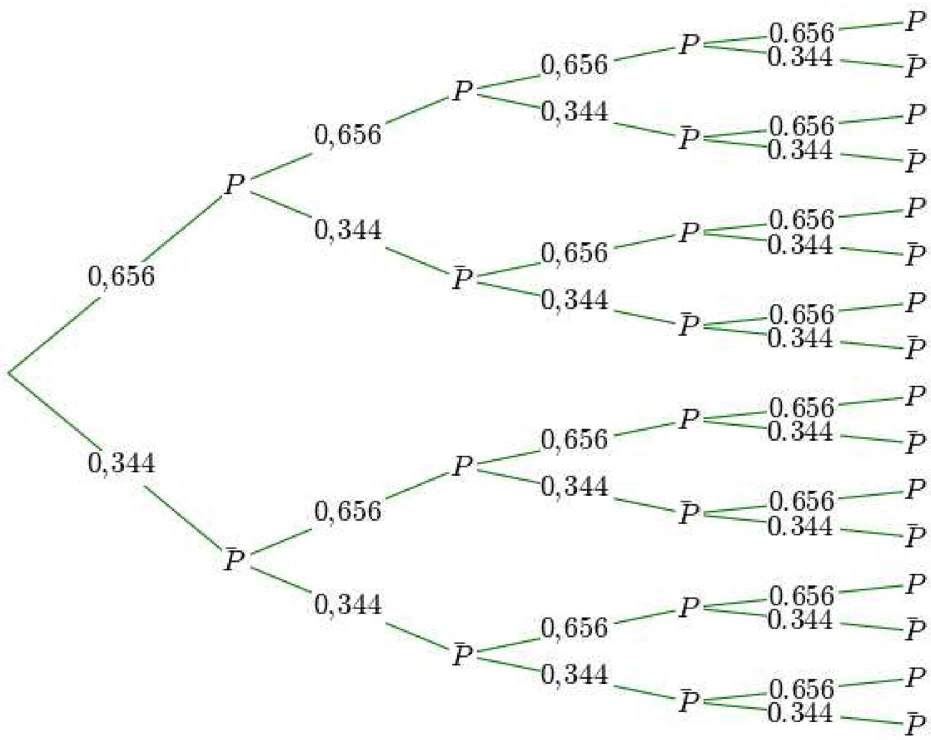
$$\begin{aligned} p(P) &= p(C \cap P) + p(D \cap P) + p(E \cap P) \\ &= 0,288 + p(D) \times p_D(P) + p(E) \times p_E(P) \\ &= 0,288 + 0,16 \times 0,8 + 0,36 \times \frac{2}{3} \\ &= 0,288 + 0,128 + 0,24 \end{aligned}$$

Donc **la probabilité pour une souris d'être performante est de 0,656**.

4) Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de souris performantes.
X peut prendre les valeurs suivantes : 0 ; 1 ; 2 ; 3 et 4.
X suit une loi binomiale de paramètres 4 et 0,656.
L'événement « obtenir au moins une souris performante » est l'événement contraire de « n'obtenir aucune souris performante ».
Or la probabilité de n'obtenir aucune souris performante est égale à
$(1-0,656) \times (1-0,656) \times (1-0,656) \times (1-0,656) = (0,344)^4$.

Donc **la probabilité d'obtenir au moins une souris performante est égale à $\mathbf{1-(0,344)^4}$, c'est-à-dire à 0,882 au millième près**.

Remarque : on aurait pu réaliser l'arbre pondéré suivant :



C. Lainé