DEVOIR SURVEILLÉ N° 9

Calcul intégral	**Le 12 avril 2010**

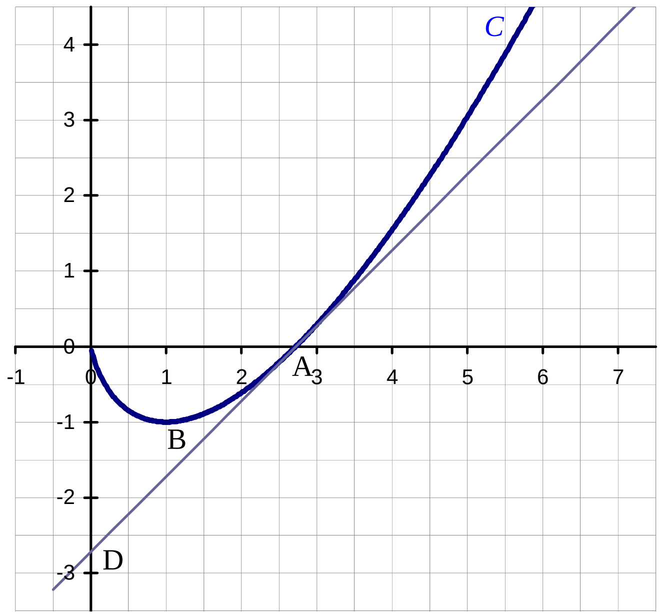
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 *points*)

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(\mathrm{e}\,;\,0)$ et $B(1\,;\,-1)$.

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et la tangente au point d'abscisse e passe par le point $D(0\,;\,-\mathrm{e})$.



1) Déterminer une équation de la droite (AD).

2) Par lectures graphiques :

a) Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Dresser le tableau de signes de f sur $]0\,;\,5]$.

c) Dresser le tableau de signes de f' sur $]0\,;\,5]$.

d) Soit F une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Déterminer les variations de F sur $]0\,;\,5]$.

e) Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=4$ et $x=5$.

Exercice 2 (6 *points*)

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^3 dx$; 2) $\displaystyle\int_2^4\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$; 3) $\displaystyle\int_0^1(3x^2-3)(x^3-3x+1)^2\,dx$;

4) $\displaystyle\int_0^4\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$; 5) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x-2}dx$.

Exercice 3 (6 *points*)

Lors d'une émission télévisée, les téléspectateurs sont appelés à envoyer des messages téléphoniques par SMS, pendant une durée de 5 minutes.
Pendant ces 5 minutes, les appels arrivent de façon continue, avec un débit variable en fonction du temps. Si x est le temps exprimé en minutes, le débit, exprimé en milliers d'appels par minute, est donné par la fonction f telle que :

- $f(x) = -4x^2 + 8x$, pour $x \in [0\ ;\ 1]$.
- $f(x) = \ln x - x + 5$, pour $x \in [1\ ;\ 5]$.

La courbe (C), représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan, est donnée ci-après à titre indicatif.
On veut calculer le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes, et on admet que ce nombre d'appels est donné par $\int_0^5 f(x)\,dx$.

1) a) Donner une primitive de la fonction f sur $[0\ ;\ 1]$.

b) Calculer l'aire exprimée en unités d'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

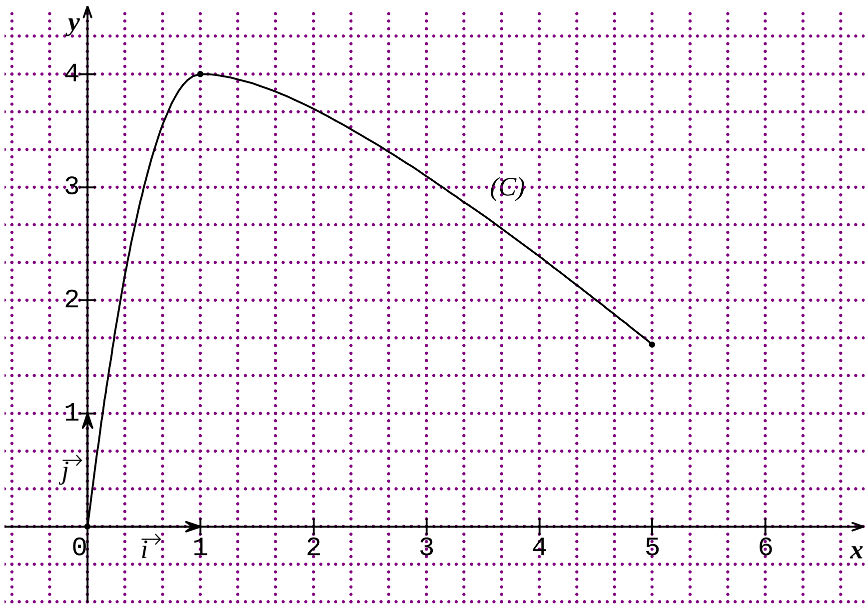
2) a) Soient g et G les fonctions définies sur $[1\ ;\ 5]$ par $g(x) = \ln x$ et $G(x) = x\ln x - x$.

Montrer que G est une primitive de g sur $[1\ ;\ 5]$.

b) Calculer l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.

c) Déterminer une valeur approchée, à l'unité près, du nombre moyen d'appels reçus entre la première minute et la cinquième minute.

3) Donner le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes.

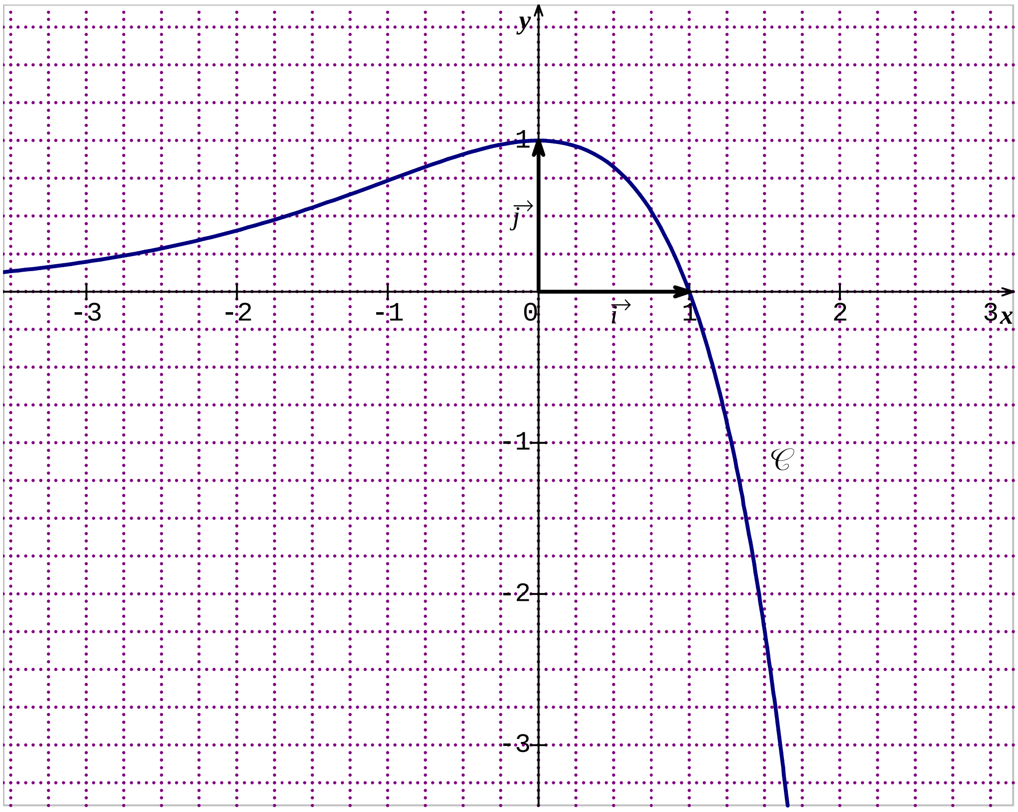


C. Lainé

Exercice 4 (4 *points*)

Soit la fonction f définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par $f(x) = (1 - x)e^x$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unités graphiques 2 cm sur chaque axe. (figure ci-dessous).



Soit F la fonction définie pour tout réel x par $F(x) = (-x + 2)e^x$.

1) Démontrer que F est une primitive de f sur **R**.

2) On appelle $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.

a) Hachurer sur le domaine défini ci-dessus sur la figure.

b) Justifier l'égalité : $\mathscr{A} = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

3) À l'aide du graphique ci-dessus, justifier que : $0 \leq \int_{-1}^{0} f(x)\,dx \leq 1$.

4) Déterminer, en cm^2, la valeur exacte de $\mathscr{A}$ puis sa valeur décimale arrondie au centième.