

# CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N° 9

Calcul intégral

Le 12 avril 2010

## Exercice 1 (Pondichéry, avril 2009)

1) Le coefficient directeur de  $(AD)$  est égal à  $\frac{y_D - y_A}{x_D - x_A}$ , c'est-à-dire à 1.

Alors  $(AD)$  a pour équation  $y = x + b$ .

Or  $(AD)$  passe par  $A$ , alors  $y_A = x_A + b$  ; d'où  $b = -e$ .

Par conséquent,  $(AD)$  a pour équation  $y = x - e$

2) a)  $f(1) = -1$  et  $f'(1) = 0$  (car la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est horizontale).

b) D'après le graphique :

|      |   |   |   |   |
|------|---|---|---|---|
| x    | 0 | e | 5 |   |
| f(x) |   | - | 0 | + |

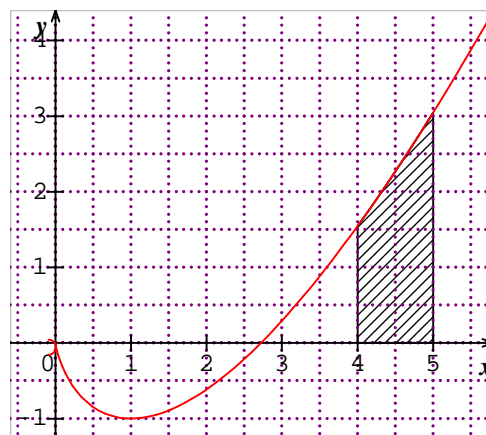
c) D'après les variations de  $f$  :

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| x     | 0 | 1 | 5 |   |
| f'(x) |   | - | 0 | + |

d) Comme  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ , alors  $F' = f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

D'après la question 2) b), on en déduit que  $F$  est décroissante sur  $]0 ; e]$  et croissante sur  $[e ; 5]$ .

e) D'après le graphique suivant, on peut voir que l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équation  $x = 4$  et  $x = 5$ , est comprise entre 2 et 3.



## Exercice 2

1)  $\int_1^3 dx = [x]_1^3 = 3 - 1 = 2$ .

$$2) \int_2^4 \left( x^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{x} \right]_2^4 = \left( \frac{64}{3} + \frac{1}{4} \right) - \left( \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{56}{3} - \frac{1}{4} = \frac{224-3}{12} = \frac{221}{12}.$$

$$3) \int_0^1 (3x^2 - 3)(x^3 - 3x + 1)^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{3} \times 3(3x^2 - 3)(x^3 - 3x + 1)^2 dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3} (x^3 - 3x + 1)^3 \right]_0^1$$

$$= \left[ \frac{1}{3} (1 - 3 + 1)^3 \right] - \left[ \frac{1}{3} (0 - 0 + 1)^3 \right]$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$4) \int_0^4 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx = \int_0^4 \frac{1}{2} \times \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$$

$$= \left[ \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+2x+2} \right]_0^4$$

$$= \left[ \sqrt{x^2+2x+2} \right]_0^4$$

$$= \sqrt{16+8+2} - \sqrt{0+0+2} = \sqrt{26} - \sqrt{2}$$

5) Posons  $u(x) = x - 2$ , alors  $u'(x) = 1$ . On obtient donc :  $\frac{1}{x-2} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ .

Comme  $u$  est négative sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ , alors une primitive de  $\frac{u'}{u}$  est  $\ln(-u)$ .

Donc  $\int_0^1 \frac{1}{x-2} dx = \left[ \ln(-x+2) \right]_0^1 = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2)$ .

### **Exercice 3** (Nouvelle-Calédonie, mars 2007)

1) a) La fonction  $f$  est continue sur  $[0 ; 1]$  en tant que fonction polynôme ; elle admet donc des primitives sur cet intervalle.

Une primitive de  $x \mapsto x^2$  est  $x \mapsto \frac{1}{3} x^3$  et une primitive de  $x \mapsto x$  est  $x \mapsto \frac{1}{2} x^2$ .

Donc **une primitive de la fonction  $f$  sur  $[0 ; 1]$  est la fonction  $F$  définie par**

$$F(x) = -4 \times \frac{x^3}{3} + 8 \times \frac{x^2}{2} = -\frac{4}{3} x^3 + 4x^2.$$

b) Comme la fonction  $f$  est positive sur  $[0 ; 1]$  (car la courbe  $(C)$  est au-dessus de l'axe des abscisses sur  $[0 ; 1]$ ), alors l'aire exprimée en unités d'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 1$  est égale à  $\int_0^1 f(x) dx$ .

$$\text{Or } \int_0^1 f(x) dx = \left[ F(x) \right]_0^1 = F(1) - F(0) = \left( -\frac{4}{3} \times 1^3 + 4 \times 1^2 \right) - \left( -\frac{4}{3} \times 0^3 + 4 \times 0^2 \right) = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3}.$$

Par conséquent, **l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 1$  est égale à  $\frac{8}{3}$  unités d'aire.**

2) a) On a :  $G = uv - u$  avec  $u(x) = x$  et  $v(x) = \ln x$ .

Alors  $G' = (u'v + uv') - u'$  avec  $u'(x) = 1$  et  $v'(x) = \frac{1}{x}$ .

D'où :  $G'(x) = \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x = g(x)$ , pour tout  $x$  de  $[1; 5]$ .

On en déduit que **G est une primitive de g sur  $[1; 5]$** .

b) Comme la fonction  $f$  est positive sur  $[1; 5]$  (car la courbe (C) est au-dessus de l'axe des abscisses sur  $[1; 5]$ ), alors l'aire exprimée en unités d'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 5$  est égale

à  $\int_1^5 f(x) dx$ .

Cherchons une primitive  $H$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1; 5]$ .

D'après la question précédente, une primitive de  $x \mapsto \ln x$  est  $x \mapsto x \ln x - x$  et une primitive de  $x \mapsto -x + 5$  est  $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 5x$ . Donc une primitive de  $f$  sur  $[1; 5]$  est la fonction  $H$

définie par  $H(x) = x \ln x - x - \frac{x^2}{2} + 5x = x \ln x - \frac{x^2}{2} + 4x$ .

D'où :  $\int_1^5 f(x) dx = [H(x)]_1^5 = H(5) - H(1) = \left(5 \ln 5 - \frac{1}{2} \times 25 + 20\right) - \left(1 \ln 1 - \frac{1}{2} \times 1 + 4\right) = 5 \ln 5 + 4$

Par conséquent, **l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 5$ , est égale à  $5 \ln(5) + 4$  unités d'aire.**

c) Le nombre moyen d'appels reçus entre la première minute et la cinquième minute est égal à  $\frac{1}{5-1} \int_1^5 f(x) dx$ , c'est-à-dire à  $\frac{1}{4} \int_1^5 f(x) dx$ . Or  $\int_1^5 f(x) dx = 5 \ln 5 + 4$  d'après la question

précédente. Par suite,  $\frac{1}{4} \int_1^5 f(x) dx = \frac{5 \ln 5 + 4}{4} \approx 3$

Par conséquent, **il y a en moyenne 3000 appels reçus par minute entre la première minute et la cinquième minute.**

3) D'après l'énoncé, le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes est égal à

$\int_0^5 f(x) dx$ . Or  $\int_0^5 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx$  d'après la relation de Chasles.

D'où :  $\int_0^5 f(x) dx = \frac{8}{3} + 5 \ln 5 + 4 = \frac{20}{3} + 5 \ln 5$ .

Donc **le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes est égal à  $\frac{20}{3} + 5 \ln(5)$ , soit environ 14714 appels.**

#### **Exercice 4** (Antilles-Guyane, septembre 2008)

1) On remarque que  $F = uv$  avec  $u(x) = -x + 2$  et  $v(x) = e^x$ .

Alors  $F' = u'v + uv'$  avec  $u'(x) = -1$  et  $v'(x) = e^x$ .

D'où  $F'(x) = -1 \times e^x + (-x + 2) \times e^x = (-1 - x + 2) e^x = (-x + 1) e^x = f(x)$ , pour tout réel  $x$ .

Par conséquent, **F est une primitive de f sur  $\mathbb{R}$ .**

2) a) Voir graphique ci-dessous.

b) Comme la fonction  $f$  est positive sur  $[-1; 0]$  (d'après sa représentation graphique), alors

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^0 f(x) dx.$$

3) D'après le graphique, on peut dire que, pour tout  $x$  de  $[-1; 0]$ ,  $0 \leq f(x) \leq 1$ .

D'après le respect de l'ordre par l'intégration, on en déduit que :  $\int_{-1}^0 0 dx \leq \int_{-1}^0 f(x) dx \leq \int_{-1}^0 1 dx$ ,  
c'est-à-dire  $0 \leq \int_{-1}^0 f(x) dx \leq [x]_{-1}^0$ . Par conséquent,  $0 \leq \int_{-1}^0 f(x) dx \leq 1$ .

4)  $\mathcal{A} = \int_{-1}^0 f(x) dx = F(0) - F(-1)$  unités d'aire.

Or  $F(0) = (-0 + 2)e^0 = 2$ ,  $F(-1) = (1 + 2)e^{-1} = \frac{3}{e}$  et une unité d'aire est égale à  $4 \text{ cm}^2$ .

Donc  $\mathcal{A} = 4 \left( 2 - \frac{3}{e} \right) \text{ cm}^2 \approx 3,59 \text{ cm}^2$