ÉTUDE DE FONCTIONS	
Fonction logarithme népérien	***Fiche d'exercices***

Exercice 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ 4\right]$. La courbe représentative $\mathcal{C}$ de **la fonction dérivée *f* '** de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OI},\ \overrightarrow{OJ}\right)$.

Remarque : les points $A(\ln 2\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ -1)$ appartiennent à la courbe $\mathcal{C}$.

1) Donner le sens de variation de f sur son ensemble de définition. Justifier la réponse.

La représentation graphique de f est appelée (Γ).

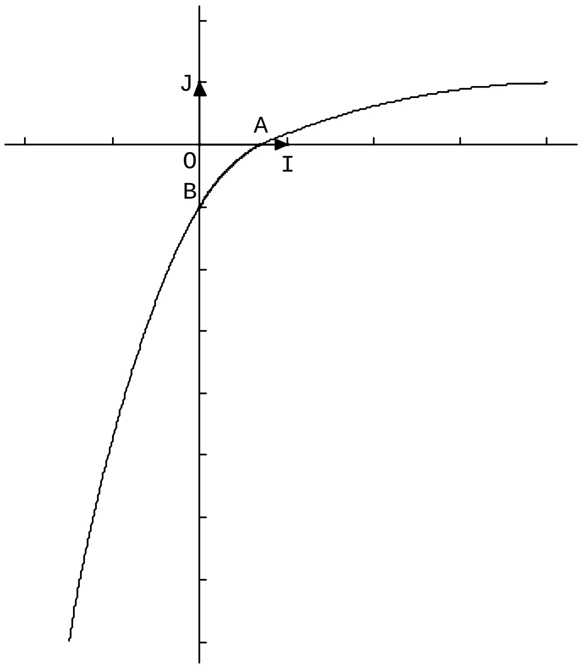
2) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0.

3) Dans cette question on suppose que $f(\ln 2) = 1$.

Dire, pour chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse donnée, si elle est vraie, fausse ou si le texte ne permet pas de répondre.

a) la droite d'équation $y = 1$ est tangente à (Γ).

b) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\ ;\ 4\right]$ $\left[-\frac{3}{2};4\right]$.



Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1-\ln x}{x}$.

On nomme C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1) Soit g la fonction définie sur I par : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

a) Étudier les variations de g.

b) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution, notée α, appartenant à l'intervalle [1 ; 2].
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
c) Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2) a) Démontrer que pour tout x de $\mathtt{I}$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.
En déduire les variations de la fonction f.
b) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
c) Tracer C.

Exercice 3 *(Asie, juin 2002)*
Le but du problème est d'étudier le coût marginal et le coût total de production d'un produit dans une entreprise.
L'objet de la partie **A** est de déterminer une fonction h satisfaisant à des conditions données.
L'objet de la partie **B** est l'étude de propriétés d'une fonction f.
L'objet de la partie **C** est d'utiliser certains résultats de la partie **A** pour répondre à des questions d'ordre économique.

PARTIE A

La courbe (C), **donnée en annexe**, est la courbe représentative d'une fonction h définie sur [0 ; +∞[.
Le point A a pour coordonnées (0 ; 2). La droite (T) est tangente à la courbe (C) au point A.

1) a) Préciser $h(0)$.
b) Déterminer à l'aide d'une lecture graphique le nombre dérivé $h'(0)$.
Justifier la réponse.
2) La fonction h, définie sur [0 ; +∞[est de la forme : $h(x)=ax^2+bx+c+2\ \ln(x+1)$, où a, b et c sont des nombres réels.
On note h' la dérivée de la fonction h. Exprimer $h'(x)$ en fonction de a et b.

3) On donne $h'(3)=\dfrac{1}{2}$.
En utilisant ce résultat et les résultats de la question 1), déterminer chacune des valeurs a, b et c.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $\mathtt{I}$ = [0 ; 5] par : $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-3x+2+2\ \ln(x+1)$.

1) a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $\mathtt{I}$: $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x+1}$.
c) Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $\mathtt{I}$.
d) En déduire les variations de f sur [0 ; 5].
2) Soit g la fonction définie sur $\mathtt{I}$ par : $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$.
a) Calculer la dérivée de la fonction g.
b) En déduire une primitive F de la fonction f sur $\mathtt{I}$.
c) Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-3} près, de la différence $F(5)-F(0)$.

PARTIE C

Sur l'intervalle [0 ; 5], la fonction f de la partie précédente représente le coût marginal de production d'un liquide conditionné en flacons d'un litre, en fonction de la quantité produite.
On rappelle que le coût marginal de production est assimilé à la dérivée du coût total.
x représente le volume en **milliers** de litres, x variant sur l'intervalle [0 ; 5].

$f(x)$ représente le coût marginal en **milliers** d'euros.

1) Quel est le coût marginal, en euros, du 3000^e litre produit ?
2) Pour quelle quantité produite le coût marginal est-il minimum ? (Donner la valeur au litre près.)
3) Les coûts fixes sont de 1000 euros.
   a) Montrer, en utilisant le résultat de la **partie B**, question 2) b), que le coût total est donné par l'expression définie sur [0 ; 5] par : $C(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2(x+1)\ln(x+1) + 1$.
   b) Calculer $C(5) - C(0)$ à un euro près et interpréter en termes de coût cette différence. Comparer ce résultat à celui trouvé à la **partie B**, 2) c) et expliquer cette réponse.

Annexe au problème