

## Exercice 1

Pour chacune des questions ci-dessous, une et une seule affirmation est juste. Le candidat doit porter sur sa copie le numéro de la question ainsi que la lettre associée à la réponse choisie. **Aucune justification n'est demandée.**

Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse retire 0,25 point et l'absence de réponse n'apporte ni ne retire aucun point. Si le total des points est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

On désigne par  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $I = ]-1 ; +\infty[$ .

1. Si la fonction  $f$  vérifie que  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  : alors :
  - a. on peut affirmer que la fonction  $f$  est croissante sur  $I$  ;
  - b. on peut affirmer que la fonction  $f$  est monotone sur  $I$  ;
  - c. on ne peut pas en déduire le sens de variations de  $f$  sur  $I$ .
2. Si  $f$  est strictement croissante sur  $[10 ; +\infty[$ , et si  $g$  est la fonction définie par :  $g(x) = e^{-f(x)}$ , alors :
  - a.  $g$  est strictement croissante sur  $[10 ; +\infty[$  ;
  - b. on ne peut pas déterminer le sens de variations de  $g$  ;
  - c.  $g$  est strictement décroissante sur  $[10 ; +\infty[$ .
3. Si  $F$  est la primitive de  $f$  sur  $I$ , qui prend la valeur  $\frac{3}{7}$  en 1 et si  $\int_0^1 f(t) dt = \frac{2}{5}$  alors :
  - a.  $F(0) = \frac{1}{2}$
  - b.  $F(0) = \frac{1}{35}$
  - c. on ne peut pas déterminer  $F(0)$ .
4. Si la fonction  $u$  est définie par  $u(x) = \ln[ f(x)]$  alors :
  - a. la fonction  $u$  est définie sur  $]0 ; +\infty [$  ;
  - b. la fonction  $u$  est définie sur  $I$  ;
  - c. on ne peut pas donner le domaine de définition de la fonction  $u$ .

## Exercice 2

Le tableau ci-dessous donne les cumuls des nombres d'entrées de cinq films sortis au cours de l'année 2006, d'une part en région parisienne, d'autre part sur la France dans son ensemble. (source : « le film français », chiffres arrêtés au 3 avril 2007).

Film	Indice $i$ ( $1 \leq i \leq 5$ )	Nombres d'entrées en région parisienne en centaines de milliers : $x_i$	Nombres d'entrées en France en centaines de milliers : $y_i$
Pirates des Caraïbes 2	1	10	75
Arthur et les Minimoys	2	9	62
Da Vinci Code	3	7,5	41,5
Ne le dis à personne	4	6,5	32
Indigènes	5	5	29,5

1. a. Représenter le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i; y_i)$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour une centaine de milliers d'entrées sur l'axe des abscisses et 1 cm pour la centaines de milliers d'entrées sur l'axe des ordonnées).
  - b. Déterminer les coordonnées du point moyen G de cette série et placer G dans le repère précédent.
  - c. Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de  $\Delta$ , droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés (les coefficients sont arrondis au dixième). Tracer cette droite dans le repère précédent.
  - d. En utilisant cette approximation affine, calculer le nombre d'entrées cumulées sur la France qu'on aurait pu prévoir pour le film « Les bronzés 3 » sachant qu'il en a réalisé 1 140 000 en région parisienne (on arrondira le résultat à la dizaine de milliers d'entrées).
2. La forme du nuage de points ci-dessus suggère de faire un ajustement par une courbe de type exponentiel d'équation  $y = Ae^{Bx}$  (où  $A$  et  $B$  sont des réels). Pour cela on pose d'abord  $z = \ln(y)$ .
    - a. Recopier et compléter le tableau suivant avec des valeurs de  $z_i$  arrondies à  $10^{-2}$  ( $1 \leq i \leq 5$ ).

$x_i$	10	9	7,5	6,5	5
$y_i$	75	62	41,5	32	29,5
$z_i = \ln(y_i)$					

- b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de  $z$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au millième).
  - c. En utilisant la relation  $z = \ln(y)$  déterminer alors les valeurs arrondies à  $10^{-3}$  des réels  $A$  et  $B$  tels que  $y = Ae^{Bx}$ .
  - d. En utilisant l'approximation  $y \approx 9,689e^{0,202x}$ , quel nombre d'entrées, cumulées sur la France aurait-on pu prévoir pour le film « Les bronzés 3 » sachant qu'il en a réalisé 1 140 000 en région parisienne ? On arrondira le résultat au millier d'entrées.
3. Le nombre d'entrées en fin d'exploitation pour ce film sur la France a été de 10 300 000. Lequel des deux ajustements semble le plus approprié ?

### **Exercice 3**

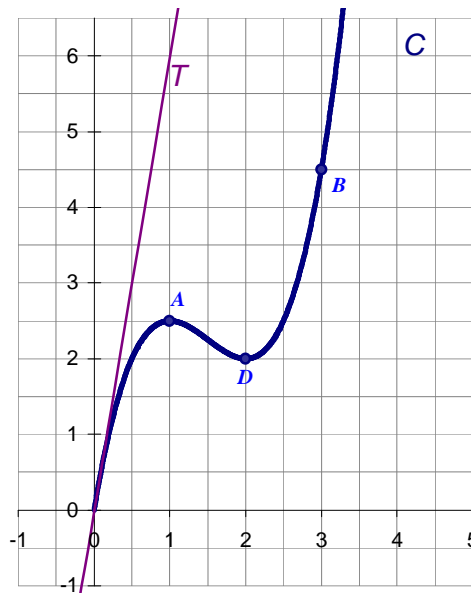
Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Le graphique ci-dessous représente une partie de la courbe représentative  $C$  d'une fonction  $F$  définie et dérivable sur  $[0 ; 4]$ . On désigne par  $f$  la fonction dérivée de  $F$  sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbf{R}$ .

La courbe  $C$  passe par l'origine  $O$  du repère et par les points  $A\left(1; \frac{5}{2}\right)$ ,  $B\left(3; \frac{9}{2}\right)$  et  $D(2; 2)$ .

La courbe  $C$  admet en  $A$  et en  $D$  une tangente horizontale.

On désigne par  $T$ , la tangente à  $C$  au point  $O$  ; cette tangente  $T$  passe par le point de coordonnées  $(1; 6)$ .



1. Que représente la fonction  $F$  pour la fonction  $f$  ?
2. À partir du graphique et des données de l'énoncé, dresser le tableau de variations de  $F$  sur  $[0; 3]$ .
3. a. Déterminer graphiquement l'équation réduite de la droite  $T$ .  
b. En déduire  $f(0)$ .
4. Indiquer sur quel(s) intervalle(s) la fonction  $f$  est positive.
5. Déterminer la valeur exacte de l'intégrale  $\int_1^3 f(x) dx$ .
6. *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*  
Soit  $G$  une autre fonction primitive de  $f$  sur  $[0; 4]$ , telle que  $G(0) = 1$ .  
Calculer  $G(3)$ .

#### **Exercice 4**

Cet exercice est un QCM (Questionnaire à Choix Multiples). Pour chacune des questions, une seule des réponses a, b ou c est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

*Le barème sera établi comme suit : pour une réponse exacte, 0,5 point ; pour une réponse fautive ou l'absence de réponse 0 point.*

1. J'ouvre un livret d'épargne rémunéré à un taux annuel de 3,8 % et je place de l'argent pendant deux ans : 750 € dès la première année et 850 € supplémentaires la deuxième année. À la fin des deux ans, je possède :
 

a. 1660,80 €	b. 1690,38 €	c. 1723,91 €
--------------	--------------	--------------
2.  $\ln(e^2 + e)$  est égal à :
 

a. $\ln e^2 + \ln e$	b. 2,31	c. $1 + \ln(e+1)$
----------------------	---------	-------------------
3. L'égalité  $\ln(x^2 + 3x) = \ln x + \ln(x+3)$  est vraie :
 

a. pour tout $x$ réel	b. si $x > 0$	c. si $x < -3$ ou si $x > 0$
-----------------------	---------------	------------------------------
4. On donne ci-dessous la fréquentation mensuelle des cinémas en France en 2006 en millions d'entrées :



À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés.

- b. Calculer la population mondiale en millions d'habitants qui aurait dû être atteinte en 2008 d'après ce modèle (à 100 millions près).
5. En fait, en 2008 on vient de dépasser 6,5 milliards d'habitants. Des deux estimations précédentes, laquelle est la plus proche de la réalité ?

### **Exercice 6**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

*Le barème sera établi comme suit : pour une réponse exacte, 0,5 point ; pour une réponse fautive ou l'absence de réponse, 0 point.*

1. Un véhicule coûte 15 000 € en 2008. Il se déprécie de 10 % par an (c'est-à-dire que son prix de revente baisse de 10 % par an). Sa valeur à la vente au bout de cinq ans sera de :

- 7 500 €
- 8 857,35 €
- 5 000 €

2. Soit  $u$  une fonction strictement positive sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ . Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$  alors :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[u(x)] = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[u(x)] = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[u(x)] = 0$

3. Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  :

$x_i$	-10	0	10
$p_i$	0,2	0,3	0,5

- l'espérance mathématique de cette variable est 3
- l'espérance mathématique de cette variable est -3
- l'espérance mathématique de cette variable est 0

4. Pour tout  $a > 0$ ,  $\ln 3a - \ln a$  est égale à :

- $\ln 3$
- $\ln(2a)$
- $2 \ln a$

5.  $\int_0^1 e^{2x+1} dx$  est égale à

- $e^3 - 1$
- $2e^3 - 2e$
- $\frac{e^3 - e}{2}$

6. Pour tout réel  $x$ ,  $e^{4+2x}$  est égale à :

- $(e^2)^{2x}$
- $(e^{x+2})^2$
- $e^4 + e^{2x}$

### **Exercice 7**

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à  $10^{-3}$  près.

Une étude sur le taux d'équipement en téléphonie des ménages d'une ville a permis d'établir les résultats suivants :

- 90 % des ménages possèdent un téléphone fixe ;
- parmi les ménages ne possédant pas de téléphone fixe, 87 % ont un téléphone portable ;
- 80 % des ménages possèdent à la fois un téléphone fixe et un téléphone portable.

Notations : Si  $A$  et  $B$  sont des évènements,  $\bar{A}$  désigne l'évènement contraire de  $A$  et  $P_B(A)$  la probabilité que l'évènement  $A$  soit réalisé sachant que l'évènement  $B$  l'est.

On choisit un ménage au hasard et on note :

- $F$  l'évènement : « le ménage possède un téléphone fixe » ;
- $T$  l'évènement : « le ménage possède un téléphone portable ».

1. a. Grâce aux données de l'énoncé, donner  $P(F \cap T)$ ,  $P(F)$  et  $P_{\bar{F}}(T)$ .  
b. Calculer  $P_{\bar{F}}(T)$ .
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement  $T$  est 0,887.
3. Sachant que le ménage choisi n'a pas de téléphone portable, quelle est la probabilité que ce soit un ménage possédant un téléphone fixe ?
4. On choisit successivement au hasard et de manière indépendante trois ménages. Quelle est la probabilité qu'il y en ait au plus deux ayant un téléphone portable ?

### **Exercice 8**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et dérivables sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  telles que pour tout

réel  $x$  de cet intervalle  $f(x) = (x - e)(\ln x - 1)$  et  $g(x) = \ln x - \frac{e}{x}$

La courbe représentative de la fonction  $g$  dans un repère du plan est donnée en annexe et l'unité graphique est 2 cm.

#### **PARTIE 1**

1. Démontrer que la fonction  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
2. Calculer  $g(e)$  et, grâce à la question 1, donner le signe de  $g(x)$  pour tout  $x$  strictement positif.

#### **PARTIE 2**

1. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. On note  $f'$  la dérivée de  $f$ . Démontrer que  $f'(x) = g(x)$  pour tout nombre réel  $x$  strictement positif.
3. Établir le tableau des variations de la fonction  $f$ .  
(On y fera figurer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ ).
4. Représenter graphiquement la fonction  $f$  sur la feuille annexe jointe au sujet.

#### **PARTIE 3**

Soit  $F$  la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  telle que pour tout réel  $x$  de cet intervalle :

$$F(x) = \left( \frac{x^2}{2} - ex \right) \ln x + 2ex - \frac{3}{4}x^2$$

1. Démontrer que la fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
2. On considère le domaine délimité par la courbe  $C_f$  l'axe des abscisses, les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .
  - a. Hachurer ce domaine sur le dessin.
  - b. Calculer la valeur exacte de  $\int_1^e f(x) dx$
  - c. En déduire une valeur approchée arrondie au centième de l'aire du domaine exprimée en  $\text{cm}^2$ .

