CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 9	
Tangentes communes à deux courbes	*Pour le 28 janvier 2008*

1) a) Voir figure.

b) On peut conjecturer que **$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont une tangente commune pour $a=-2$ et $b=-0{,}5$**.

2) *Justification mathématique de la conjecture*.

a) (T_1) a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$. Or $f'(x)=2x$, pour tout réel x.
Alors $f'(a)=2a$. D'où : $y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$.
Donc **(T_1) a pour équation $y=2ax-a^2$**.

(T_2) a pour équation $y=g'(b)(x-b)+g(b)$.
Or $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, pour tout réel x différent de 0. Alors $g'(b)=-\dfrac{1}{b^2}$.
D'où : $y=-\dfrac{1}{b^2}(x-b)+\dfrac{1}{b}=-\dfrac{1}{b^2}x+\dfrac{2}{b}$.
Donc **(T_2) a pour équation $y=-\dfrac{1}{b^2}x+\dfrac{2}{b}$**.

b) D'après la question précédente, **(T_1) et (T_2) sont confondues** si, et seulement si, ces droites ont le même coefficient directeur et la même ordonnée à l'origine, c'est-à-dire **si, et seulement si, $2a=-\dfrac{1}{b^2}$** et **$-a^2=\dfrac{2}{b}$**.

c) $\begin{cases} 2a=-\dfrac{1}{b^2} \\ -a^2=\dfrac{2}{b} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2b^2} \\ -\left(-\dfrac{1}{2b^2}\right)^2=\dfrac{2}{b} \end{cases}$, c'est-à-dire à $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2b^2} \\ -\dfrac{1}{4b^4}=\dfrac{2}{b} \end{cases}$.

Or $-\dfrac{1}{4b^4}=\dfrac{2}{b} \iff 8b^4=-b \iff b\left(8b^3+1\right)=0 \iff 8b^3+1=0$ car $b\neq 0$; d'où :

$-\dfrac{1}{4b^4}=\dfrac{2}{b} \iff b^3=-\dfrac{1}{8}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3$.

Donc, $\begin{cases} 2a=-\dfrac{1}{b^2} \\ -a^2=\dfrac{2}{b} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2b^2}=-\dfrac{1}{2\times\dfrac{1}{4}}=-2 \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Par conséquent, **(T_1) et (T_2) sont confondues si, et seulement si, $a=-2$ et $b=-0{,}5$**.

d) D'après la question précédente, on en déduit que **$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont une tangente commune**.

C. Lainé