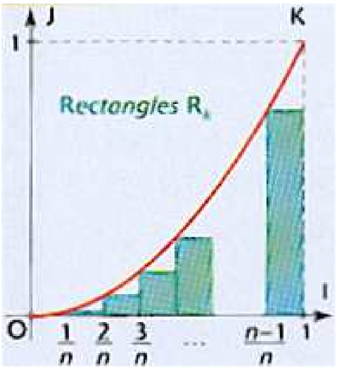
UN EXEMPLE DE CALCUL D'AIRE

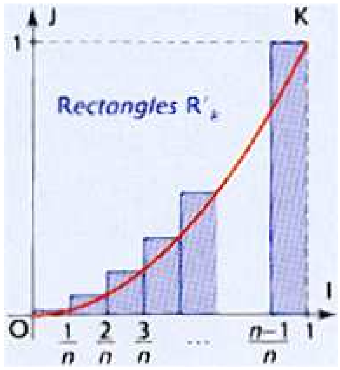
Calcul intégral	***Activité***

Dans un repère orthonormal $\left(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$, $\mathscr{C}$ est la courbe qui représente la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x^2$. $\mathscr{D}$ est le domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$.

On choisit de prendre l'aire du carré OIKJ pour unité d'aire et on se propose de déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$. Pour cela :

- on subdivise l'intervalle $[0 ; 1]$ en n intervalles de longueur $\dfrac{1}{n}$ avec n un entier naturel non nul ;
- sur chaque intervalle $\left[\dfrac{k}{n} ; \dfrac{k+1}{n}\right]$ (avec $0 \leq k \leq n-1$), on construit le rectangle R_k de hauteur $\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ et le rectangle R'_k de hauteur $\left(\dfrac{k+1}{n}\right)^2$.





a) On note u_n la somme des aires des rectangles R_k et v_n la somme des aires des rectangles R'_k.

Montrer que $u_n = \dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$ et que $v_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

Indication : Pour tout entier nature non nul n, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

D'après les propriétés du **1.**, on obtient : $u_n \leq \mathscr{A} \leq v_n$.

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

c) Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes ?

Remarque : On dit que $\mathscr{A}$ est l'intégrale de 0 à 1 de ***la fonction carré***, et on note $\mathscr{A} = \int_0^1 x^2 dx$.