INTRODUCTION HISTORIQUE DES NOMBRES COMPLEXES	
Nombres complexes	***Activité***

➢ Combien $x^3 + px + q = 0$ a-t-elle de solutions dans R ?

Historiquement, c'est en essayant de résoudre cette équation que les mathématiciens italiens de la Renaissance, XVIe siècle, surtout Cardan et Bombelli, eurent pour la première fois l'idée d'utiliser des nombres dont le carré est négatif

Mais pour cela, pour trouver des racines réelles de ces équations, ils utilisent des nombres qui ne sont pas ordinaires.
Ainsi Bombelli montre que la solution $x = 4$ de l'équation $x^3 = 15x + 4$, peut s'écrire :

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 4,$$

en remarquant (en utilisant les règles usuelles de calcul), que :

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2+11\sqrt{-1} \text{ et } \left(2-\sqrt{-1}\right)^3 = 2-11\sqrt{-1}$$

Cela permit de mettre en évidence le fait que des nombres réels peuvent être désignés par des expressions « imaginaires ». Prendre la racine carrée d'un négatif, il fallait oser ! Mais comme cette audace permet d'obtenir des résultats, les imaginaires purs sont de plus en plus utilisés avec confiance.

➢ Comment se construit cet ensemble des nombres imaginaires ?

L'équation $x + 2 = 1$ n'a pas de solution dans **N** ; cependant, elle en a une, $x = -1$, dans un ensemble « plus grand » **Z**.

De même, l'équation $7x = 1$ n'a pas de solution dans **Z** ; cependant, elle en a une, $x = \frac{1}{7}$, dans un ensemble plus grand, l'ensemble **Q**.
Ensuite, l'équation $x^2 = 5$ n'a pas de solution dans **Q**, mais elle en a deux, $x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$, dans **R**.
Ainsi, lorsqu'on a essayé de résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$, qui n'a pas de solution dans **R**, on a essayé de trouver un ensemble « plus grand » que **R** qui puisse contenir les solutions de cette équation.

Au milieu du XVIIIe, Euler (1707-1783) propose de remplacer $\sqrt{-1}$ par *i*, donc $i^2 = -1$; ce qui permettra de trouver des solutions de l'équation $x^2 + 1 = 0$: $x = i$ ou $x = -i$.
D''Alembert montre que tous les imaginaires inventés, que Gauss appellera plus tard les nombres complexes, sont de la forme $a + ib$ avec a et b réels.
Les réels sont des nombres complexes particuliers, ce sont eux qui s'écrivent $a + ib$, avec $b = 0$. L'ensemble des nombres complexes, noté **C** (ou $\mathbb{C}$), est donc une extension de l'ensemble **R** (ou $\mathbb{R}$).
Mais l'extension ne peut se faire sans réflexion, elle est soumise à certaines conditions : il faut que les opérations sur les nombres complexes, lorsqu'elles sont appliquées aux complexes particuliers que sont les réels, redonnent les résultats connus dans **R**. Les définitions des opérations sur les complexes ne sont donc pas arbitraires.
C'est au cours du XIXe siècle que les mathématiciens, Gauss surtout, donnent un statut indiscutable à ces nouveaux nombres.

C. Lainé


ROUXEL
POURQUOI FAIRE SIMPLE
QUAND ON PEUT FAIRE
COMPLEXE ?!