

**Pondichéry**

---

**1. Exercice 1**

---

4 points

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$  et soit  $H$  la fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par  $H(x) = \int_1^x f(t) dt$ .

- a) Justifier que  $f$  et  $H$  sont bien définies sur  $[1; +\infty[$ .
- b) Quelle relation existe-t-il entre  $H$  et  $f$  ?
- c) Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre  $H(3)$ .

2) On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre  $H(3)$ .

- a) Montrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $\frac{x}{e^x - 1} = x \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ .
- b) En déduire que  $\int_1^3 f(x) dx = 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$ .
- c) Montrer que si  $1 \leq x \leq 3$ , alors  $\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$ .
- d) En déduire un encadrement de  $\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$ , puis de  $\int_1^3 f(x) dx$ .

**2. Exercice 2 (non spécialistes)**

---

5 points

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

**Partie A**

On suppose connus les résultats suivants :

- a) Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes  $z_A$ ,  $z_B$  et  $z_C$  trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

Alors  $\left| \frac{z_B - z_C}{z_B - z_C} \right| = \frac{CB}{CA}$  et  $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_C}\right) = (\overline{CA}, \overline{CB}) \pmod{2\pi}$ .

- b) Soit  $z$  un nombre complexe et soit  $\theta$  un réel :

$z = e^{i\theta}$  si et seulement si  $|z| = 1$  et  $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ , où  $k$  est un entier relatif.

**Démonstration de cours :** Démontrer que la rotation  $r$  d'angle  $\alpha$  et de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$  est la transformation du plan qui a tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ .

## Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm, on considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $z_A = -\sqrt{3} - i$ ,  $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ ,  $z_C = \sqrt{3} + i$  et  $z_D = -1 + i\sqrt{3}$ .

- 1) a) Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes  $z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$ .
  - b) Comment construire à la règle et au compas les points  $A, B, C$  et  $D$  dans le repère  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$  ?
  - c) Quelle est la nature du quadrilatère  $ABCD$  ?
- 2) On considère la rotation  $r$  de centre  $B$  et d'angle  $-\frac{\pi}{3}$ . Soient  $E$  et  $F$  les points du plan définis par :  $E = r(A)$  et  $F = r(C)$ .
- a) Comment construire à la règle et au compas les points  $F$  et  $E$  dans le repère précédent ?
  - b) Donner l'écriture complexe de  $r$ .
  - c) Déterminer l'affixe du point  $E$ .

### 3. Exercice 2 (spécialistes)

---

5 points

#### Partie A

On suppose connu le résultat suivant :

Une application  $f$  du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si  $f$  admet une écriture complexe de la forme  $z' = az + b$ , où  $a \in \mathbf{C}^*$  et  $b \in \mathbf{C}$ .

Démonstration de cours : On se place dans le plan complexe. Démontrer que si  $A, B, A'$  et  $B'$  sont quatre points tels que  $A$  est distinct de  $B$  et  $A'$  est distinct de  $B'$ , alors il existe une unique similitude directe transformant  $A$  en  $A'$  et  $B$  en  $B'$ .

#### Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C, D$  d'affixes respectives  $z_A = -\sqrt{3} - i$ ,  $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ ,  $z_C = \sqrt{3} + i$  et  $z_D = -1 + i\sqrt{3}$ .

- 1) a) Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes  $z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$ .
- b) Construire à la règle et au compas les points  $A, B, C$  et  $D$  (on prendra pour unité graphique 2 cm).
- c) Déterminer le milieu du segment  $[AC]$ , celui du segment  $[BD]$ . Calculer le quotient  $\frac{z_B}{z_A}$ .

En déduire la nature du quadrilatère  $ABCD$ .

- 2) On considère la similitude directe  $g$  dont l'écriture complexe est  $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 2$ .
- Déterminer les éléments caractéristiques de  $g$ .
  - Construire à la règle et au compas les images respectives  $E$ ,  $F$  et  $J$  par  $g$  des points  $A$ ,  $C$  et  $O$ .
  - Que constate-t-on concernant ces points  $E$ ,  $F$  et  $J$ ? Le démontrer.

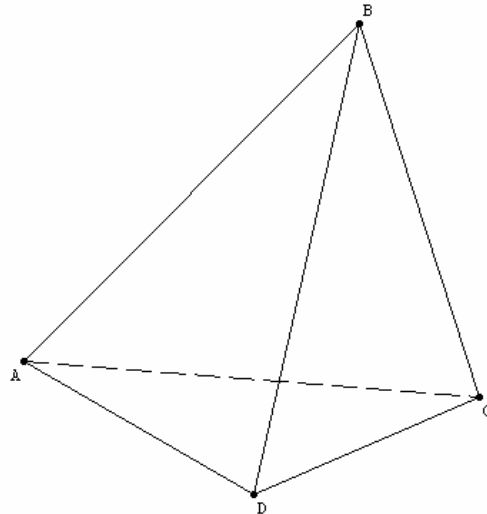
#### 4. Exercice 3

4 points

On considère un tétraèdre  $ABCD$ .

On note  $I$ ,  $J$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  les milieux respectifs des arêtes  $[AB]$ ,  $[CD]$ ,  $[BC]$ ,  $[AD]$ ,  $[AC]$  et  $[BD]$ .

On désigne par  $G$  l'isobarycentre des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .



- 1) Montrer que les droites  $(IJ)$ ,  $(KL)$  et  $(MN)$  sont concourantes en  $G$ .

Dans la suite de l'exercice, on suppose que  $AB = CD$ ,  $BC = AD$  et  $AC = BD$ .  
(On dit que le tétraèdre  $ABCD$  est équifacial, car ses faces sont isométriques).

- 2) a) Quelle est la nature du quadrilatère  $IKJL$ ? Préciser également la nature des quadrilatères  $IMJN$  et  $KNLM$ .
- b) En déduire que  $(IJ)$  et  $(KL)$  sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites  $(IJ)$  et  $(MN)$  sont orthogonales et les droites  $(KL)$  et  $(MN)$  sont orthogonales.
- 3) a) Montrer que la droite  $(IJ)$  est orthogonale au plan  $(MKN)$ .
- b) Quelle est la valeur du produit scalaire  $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$ ? En déduire que  $(IJ)$  est orthogonale à la droite  $(AB)$ . Montrer de même que  $(IJ)$  est orthogonale à la droite  $(CD)$ .
- c) Montrer que  $G$  appartient aux plans médiateurs de  $[AB]$  et  $[CD]$ .
- d) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Comment démontrerait-on que  $G$  est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre  $ABCD$ ?

## 5. Exercice 4

---

7 points

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

**Les parties A et B sont indépendantes**

### Partie A : un modèle discret

Soit  $u_n$  le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année  $n$ .

On pose  $n = 0$  en 2005,  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$ .

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; 20]$  par  $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$ .

a) Étudier les variations de  $f$  sur  $[0 ; 20]$ .

b) En déduire que pour tout  $x \in [0 ; 10]$ ,  $f(x) \in [0 ; 10]$ .

c) On donne **en annexe** la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  du plan. Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

2) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ .

3) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente et déterminer sa limite.

### Partie B : un modèle continu

Soit  $g(x)$  le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année  $x$ , On pose  $x = 0$  en 2005,  $g(0) = 1$  et  $g$  est une solution, qui ne s'annule pas sur  $[0 ; +\infty[$ , de l'équation différentielle

$$(E) : y' = \frac{1}{20}y(10 - y)$$

1) On considère une fonction  $y$  qui ne s'annule pas sur  $[0 ; +\infty[$  et on pose  $z = \frac{1}{y}$ .

a) Montrer que  $y$  est solution de (E) si et seulement si  $z$  est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) : z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}$$

b) Résoudre l'équation  $(E_1)$  et en déduire les solutions de l'équation (E).

2) Montrer que  $g$  est définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$

3) Étudier les variations de  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

4) Calculer la limite de  $g$  en  $+\infty$  et interpréter le résultat.

5) En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5

millions ?

### Annexe

