

1. Exercice 1

Partie A : étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours

1) Comme la fonction y est dérivable et strictement positive sur $[0 ; 30]$, alors la fonction z est dérivable sur $[0 ; 30]$, et $z' = -\frac{y'}{y^2}$, c'est-à-dire $y' = -zy^2$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(0) = 0,01 \\ y' = 0,05y(10 - y) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{z(0)} = 0,01 \\ -zy^2 = 0,05y(10 - y) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z(0) = \frac{1}{0,01} = 100 \\ z' = -0,05 \frac{1}{y} (10 - y) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0,05z \left(10 - \frac{1}{z}\right) = -0,5z + 0,05 \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0) = 0,01 \\ y' = 0,05y(10 - y) \end{cases}$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0,5z + 0,05 \end{cases}$.

2) a) Les solutions de l'équation différentielle $z' = -0,5z + 0,05$ sont les fonctions définies sur $[0 ; 30]$ par $z(x) = Ce^{-0,5x} + 0,1$ où C est une constante réelle.

Or $z(0) = 100$, alors $C + 0,1 = 100$, c'est-à-dire $C = 99,9$.

Donc, pour tout réel x de $[0 ; 30]$, $z(x) = 99,9 e^{-0,5x} + 0,1$.

Comme $y = \frac{1}{z}$, alors $y(t) = \frac{1}{99,9e^{-0,5t} + 0,1} = \frac{10}{999 e^{-0,5t} + 1}$, pour tout réel t de $[0 ; 30]$.

b) Le pourcentage de la population infectée au bout de 30 jours est égal à $y(30)$.

Or $y(30) = \frac{10}{999e^{-15} + 1} \approx 10$.

Par conséquent, environ 10 % de la population est infectée au bout de 30 jours.

Partie B : étude sur l'efficacité d'un vaccin

Soient les événements suivants : V : « l'individu est vacciné » et M : « l'individu est malade ».

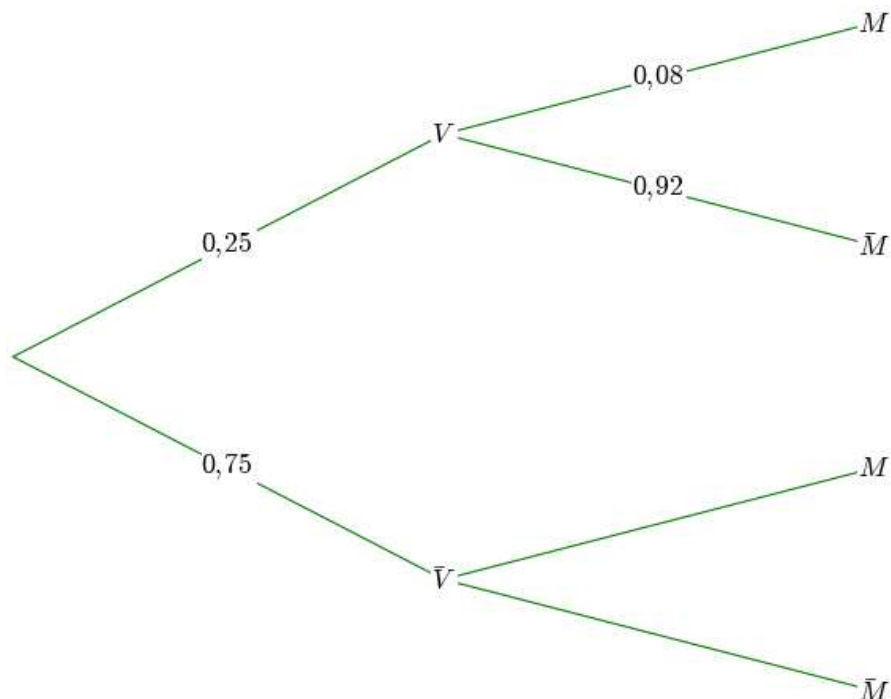
Comme le quart de la population est vaccinée, alors $p(V) = 0,25$.

On en déduit que $p(\bar{V}) = 0,75$.

Comme sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades, alors $p_V(\bar{M}) = 0,92$.

De plus, 10 % de la population totale est malade, alors $p(M) = 0,1$.

On peut alors modéliser la situation par l'arbre pondéré suivant :



1) Rechercher la probabilité de l'événement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » revient à déterminer $p(\bar{V} \cap M)$.

Comme V et \bar{V} forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales,

$$p(M) = p(V \cap M) + p(\bar{V} \cap M) = p(V) \times p_V(M) + p(\bar{V} \cap M)$$

D'où : $p(\bar{V} \cap M) = p(M) - p(V) \times p_V(M) = 0,1 - 0,25 \times 0,08 = 0,08$.

Donc la probabilité de l'événement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à **0,08**.

2) La probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné est égale à $p_{\bar{V}}(M)$.

$$\text{Or } p_{\bar{V}}(M) = \frac{p(\bar{V} \cap M)}{p(\bar{V})} = \frac{0,08}{0,75} = \frac{8}{75}.$$

La probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné est égale à $\frac{8}{75}$.

2. Exercice 2

Partie A : restitution organisée de connaissances

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$.

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b (g - f)(x) dx.$$

Comme $g(x) \geq f(x)$ pour tout x de $[a ; b]$, alors $(g - f)(x) \geq 0$.

On en déduit que $\int_a^b (g - f)(x) dx \geq 0$, et par suite, $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Par conséquent, **si f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.**

Partie B

1) a) Comme x appartient à $[0 ; 1]$ et que la fonction $x \mapsto -x^2$ est décroissante sur $[0 ; 1]$, alors $-0^2 \geq -x^2 \geq -1^2$, c'est-à-dire $-1 \leq -x^2 \leq 0$.

Or la fonction exponentielle est croissante sur \mathbf{R} donc sur $[-1 ; 0]$; on en déduit que

$$e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq e^0, \text{ ou encore que } \frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1.$$

Par conséquent, **pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$.**

b) Comme les fonctions $x \mapsto \frac{1}{e}$, f et $x \mapsto 1$ sont continues sur $[0 ; 1]$, d'après la partie A,

$$\int_0^1 \frac{1}{e} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 1 dx.$$

Or $\int_0^1 \frac{1}{e} dx = \frac{1}{e}(1-0) = \frac{1}{e}$ et $\int_0^1 1 dx = 1(1-0) = 1$. Par conséquent, $\frac{1}{e} \leq u_0 \leq 1$.

$$2) u_1 = \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 xe^{-x^2} dx.$$

Si on pose $v(x) = -x^2$, alors $v'(x) = -2x$. D'où : $xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}v'(x)e^{v(x)}$.

Or une primitive de la fonction $v'e^v$ est la fonction e^v .

$$\text{On en déduit que : } u_1 = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2}e^{-1} \right) - \left(-\frac{1}{2}e^0 \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} = \frac{e-1}{2e}.$$

3) a) Pour tout réel x de $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, $x^n \geq 0$ et $e^{-x^2} \geq 0$; alors $x^n e^{-x^2} \geq 0$.

D'après la propriété donnée dans les pré-requis de la partie A, on en déduit que

$$\int_0^1 x^n e^{-x^2} dx \geq 0, \text{ c'est-à-dire que } u_n \geq 0 \text{ pour tout entier naturel } n \text{ non nul.}$$

De plus, $u_0 > 0$ d'après la question 1) b) de la partie B ?

Par conséquent, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2} dx - \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx = \int_0^1 [x^{n+1} e^{-x^2} - x^n e^{-x^2}] dx = \int_0^1 (x-1) x^n e^{-x^2} dx.$$

Pour tout réel x de $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, $x^n e^{-x^2} \geq 0$ et $x-1 \leq 0$; alors

$(x-1)x^n e^{-x^2} \leq 0$. On en déduit que $\int_0^1 (x-1)x^n e^{-x^2} dx \leq 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier naturel n non nul.

De plus, $u_1 \approx 0,32$ et $0,36 < u_0 \leq 1$, d'où $u_1 < u_0$. Par suite, $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier naturel n . Par conséquent, **la suite (u_n) est décroissante**.

c) D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; **elle est donc convergente vers un réel l**.

4) a) D'après la question 1) a), pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$. Or, pour tout entier naturel n , $0 \leq x^n$, alors $\frac{x^n}{e} \leq x^n f(x) \leq x^n$.

Comme $x^n f(x) \leq x^n$ pour tout réel x de $[0 ; 1]$, d'après la propriété de la partie A, on obtient :

$$\int_0^1 x^n f(x) dx \leq \int_0^1 x^n dx.$$

$$\text{Or } \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1} ; \text{ on en déduit que : } u_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ pour tout entier}$$

naturel n.

b) D'après la question précédente et la question 3) a), on, peut écrire que :

$$\text{pour tout entier naturel } n, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3. Exercice 3

1) Dans le repère $(A ; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$, les points A, B, C, D, E, F, G et H ont respectivement pour coordonnées $(0 ; 0 ; 0)$, $(1 ; 0 ; 0)$, $(1 ; 1 ; 0)$, $(0 ; 1 ; 0)$, $(0 ; 0 ; 1)$, $(1 ; 0 ; 1)$, $(1 ; 1 ; 1)$ et $(0 ; 1 ; 1)$.

Comme I est le centre de la face $ADHE$, alors I est le milieu de $[AH]$.

D'où **I a pour coordonnées $\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$** .

De même, J est le centre de la face $ABCD$, alors J est le milieu de $[AC]$.

D'où **J a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 0\right)$** .

Comme K est le milieu de $[IJ]$, alors **K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4}\right)$** .

2) Les vecteurs \overline{AK} et \overline{AG} ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4}\right)$ et $(1 ; 1 ; 1)$.

Or $\frac{x_{\overline{AK}}}{x_{\overline{AG}}} \neq \frac{y_{\overline{AK}}}{y_{\overline{AG}}}$, alors \overline{AK} et \overline{AG} ne sont pas colinéaires.

Par conséquent, **les points A, K et G ne sont pas alignés**. Ils déterminent donc un plan de l'espace.

3) a) $AI = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ et $AJ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, alors A appartient au plan médiateur du segment $[IJ]$.

K est le milieu de $[IJ]$, alors K appartient au plan médiateur du segment $[IJ]$.

$GI = \sqrt{(0-1)^2 + \left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $GJ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, alors G appartient au plan médiateur du segment $[IJ]$.

D'après la question précédente, on en déduit que **le plan médiateur du segment $[IJ]$ est le plan (AKG)** .

b) D'après la question précédente, on peut dire que le vecteur \overrightarrow{IJ} est un vecteur normal du plan (AKG) .

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in (AKG) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0 \\ &\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}-0\right) + y\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + z\left(0-\frac{1}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z = 0 \\ &\Leftrightarrow x - z = 0 \end{aligned}$$

Donc **(AKG) a pour équation cartésienne $x - z = 0$** .

c) $x_D = z_D = 0$, alors les coordonnées de D vérifient l'équation du plan (AKG) .

Donc **D appartient à (AKG)** .

4) a) Comme L est le centre de la face $DCGH$, alors L est le milieu de $[DG]$.

D'où L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.

$$\text{On en déduit que } \begin{cases} \frac{x_A + x_L}{2} = \frac{1}{4} = x_K \\ \frac{y_A + y_L}{2} = \frac{1}{2} = y_K \\ \frac{z_A + z_L}{2} = \frac{1}{4} = z_K \end{cases}, \text{ et par suite, que } \mathbf{K \text{ est le milieu de } [AL]}.$$

b) Soit Ω le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(D, 1)$ et $(G, 1)$.

Comme L est le milieu de $[DG]$, L est alors l'isobarycentre des points D et G .

D'après le théorème d'associativité des barycentres, Ω est alors le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(L, 2)$, c'est-à-dire l'isobarycentre des points A et L .

On en déduit que Ω est le milieu du segment $[AL]$, et par suite, $\Omega = K$ (d'après la question précédente).

Par conséquent, **K est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(D, 1)$ et $(G, 1)$** .

4. Exercice 4 (enseignement obligatoire)

Partie A : étude d'un cas particulier

$$1) a) \frac{-a}{b-a} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i-1-i\sqrt{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i} = \frac{(-1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3})^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{4}.$$

Donc $\frac{-a}{b-a} = i$.

b) D'après la question précédente :

$$\frac{AO}{AB} = \frac{|0-a|}{|b-a|} = \frac{|-a|}{|b-a|} = |i| = 1 \quad \text{et} \quad (\overline{AB}, \overline{AO}) = \arg\left(\frac{0-a}{b-a}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que **le triangle OAB est rectangle isocèle en A**.

2) Comme C est l'image de A par la rotation r , alors $c-0 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(a-0)$.

$$\text{D'où : } c = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)(1+i\sqrt{3}) = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}.$$

Par conséquent, $c = -2$.

$$3) a) m_{(AC)} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{0 - \sqrt{3}}{-2 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \text{Alors (AC) a une équation de la forme } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + p.$$

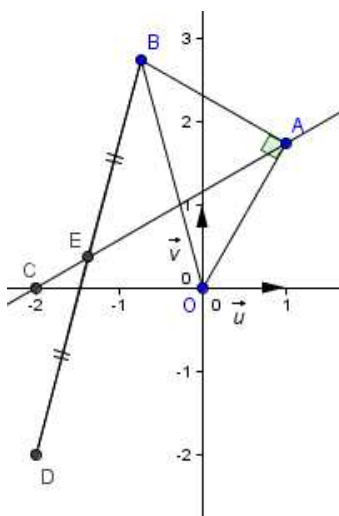
Comme le point A appartient à cette droite, alors $y_A = \frac{\sqrt{3}}{3}x_A + p$, c'est-à-dire

$$p = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad \text{Par conséquent, la droite (AC) a pour équation } y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2).$$

b) Soit E le milieu de [BD]. Alors E a pour coordonnées $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\text{Alors } \frac{\sqrt{3}}{3}(x_E + 2) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + 2\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}-3}{3 \times 2} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2} = y_E.$$

Par conséquent, **le milieu du segment [BD] appartient à la droite (AC)**.



Partie B

1) Comme A' et B' sont les images respectives de A et B par la rotation r , alors $a' - 0 = e^{i\theta}(a - 0)$ et $b' - 0 = e^{i\theta}(b - 0)$. Donc : $a' = a e^{i\theta}$ et $b' = b e^{i\theta}$.

2) a) Comme P est le milieu de $[AA']$, alors $p = \frac{a+a'}{2} = \frac{a+a e^{i\theta}}{2} = \frac{a}{2}(1+e^{i\theta})$.

Comme Q est le milieu de $[BB']$, alors $q = \frac{b+b'}{2} = \frac{b+b e^{i\theta}}{2} = \frac{b}{2}(1+e^{i\theta})$.

$$\text{b) } \frac{-p}{q-p} = \frac{-\frac{a}{2}(1+e^{i\theta})}{\frac{b}{2}(1+e^{i\theta}) - \frac{a}{2}(1+e^{i\theta})} = \frac{-\frac{a}{2}(1+e^{i\theta})}{\frac{1}{2}(1+e^{i\theta})(b-a)} = \frac{-a}{b-a}. \text{ Donc : } \frac{-p}{q-p} = \frac{-a}{b-a}.$$

c) $(\overline{PQ}, \overline{PO}) = \arg\left(\frac{0-p}{q-p}\right) = \arg\left(\frac{-a}{b-a}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ (d'après les questions 2) b) de la partie B et 1) a) de la partie A).

On en déduit que **les droites (OP) et (PQ) sont perpendiculaires.**

d) Comme P est le milieu de $[AA']$ et que $r(A) = A'$, alors (OP) est la médiatrice de $[AA']$.

D'où (AA') est la droite perpendiculaire à (OP) passant par P .

D'après la question précédente, on peut en déduire que les droites (AA') et (PQ) sont confondues. Par conséquent, **le point Q appartient à la droite (AA') .**