

**Exercice 1**

**Partie A**

1) Soit un réel  $x$ .  $e^{-x} \times e^x = e^{-x+x} = e^0 = 1$ . Comme  $e^x > 0$  **pour tout réel  $x$** , alors  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ .

2) Soit  $\mathcal{P}(n)$  la proposition, définie pour  $n$  entier naturel, par : « pour tout réel  $x$ ,  $(e^x)^n = e^{nx}$  »

→ Initialisation : pour  $n=0$ ,  $(e^x)^0 = 1$  et  $e^0 = 1$  alors on a  $\mathcal{P}(0)$  qui est vraie.

→ Hérédité : Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Alors :  $(e^x)^n = e^{nx}$ .

$(e^x)^{n+1} = (e^x)^n \times e^x = e^{nx} \times e^x = e^{nx+x} = e^{(n+1)x}$ . Par suite,  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

→ Conclusion : on a alors prouvé :

$\mathcal{P}(0)$  est vraie et pour tout  $n$  supérieur ou égal à 0,  $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ .

Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout  $n$  supérieur ou égal à 0,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie

C'est-à-dire : **pour tout réel  $x$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $(e^x)^n = e^{nx}$** .

**Partie B**

1) a)  $u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) dx$  (d'après la propriété de linéarité de l'intégration). Donc  $u_0 + u_1 = \int_0^1 1 dx = (1-0) \times 1 = 1$ .

b)  $u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \left( -\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) dx$ .

Si on pose  $u(x) = 1+e^{-x}$ , alors  $u'(x) = -e^{-x}$ . D'où :  $\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$ .

Comme  $u$  est strictement positive sur  $[0 ; 1]$ , alors une primitive de  $\frac{u'}{u}$  est  $\ln(u)$ .

Donc  $u_1 = \left[ -\ln(1+e^{-x}) \right]_0^1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+e^0) = \ln(2) - \ln(1+e^{-1})$ .

On en déduit que  $u_0 = 1 - \ln(2) + \ln(1+e^{-1})$ .

2) Pour tout entier naturel  $n$  et pour tout réel  $x$  de  $[0 ; 1]$ ,  $\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} > 0$ .

Comme la fonction  $x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$  est continue sur  $[0 ; 1]$ , alors  $\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx > 0$ .

Par conséquent, **pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 0$** .

3) a) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \left( \frac{e^{-(n+1)x} + e^{-nx}}{1+e^{-x}} \right) dx$  (d'après la propriété de linéarité de l'intégration).

Alors  $u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \left( \frac{e^{-x} + 1}{1+e^{-x}} \right) dx = \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[ -\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 = -\frac{1}{n} e^{-n} + \frac{1}{n} e^0$ .

Par conséquent, **pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$ .**

b) D'après la question précédente,  $u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n} - u_{n+1}$  pour tout entier naturel  $n$ .

Or pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} \geq 0$ , alors  $\frac{1 - e^{-n}}{n} - u_{n+1} \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$ .

Donc, **pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$ .**

4) D'après les questions précédentes,  $0 \leq u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$ , pour tout entier naturel  $n$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-n}) = 1$  (par somme de limites).

De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ ; donc, par quotient de limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - e^{-n}}{n} \right) = 0$ .

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que  **$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .**

### Exercice 2

1) La droite  $(\mathcal{D})$  a pour vecteur directeur  $\overline{AB}$  de coordonnées  $(2; -3; -1)$  et passe par le

point A. Par suite,  $(\mathcal{D})$  a une représentation paramétrique de la forme : 
$$\begin{cases} x = x_A + x_{\overline{AB}} t \\ y = y_A + y_{\overline{AB}} t \\ z = z_A + z_{\overline{AB}} t \end{cases}$$

Donc **une représentation paramétrique de  $(\mathcal{D})$  est :** 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases} \text{ avec } (t \in \mathbf{R}).$$

2) La droite  $(\mathcal{D}')$  a pour vecteur directeur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(-1; 2; 1)$ .

• Comme  $\overline{AB}$  et  $\vec{u}$  ne sont pas colinéaires (en effet,  $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\overline{AB}}} \neq \frac{y_{\vec{u}}}{y_{\overline{AB}}}$ ), alors  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{D}')$  ne sont pas parallèles.

• Cherchons l'éventuel point d'intersection des droites  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{D}')$

$$M(x; y; z) \in (\mathcal{D}) \cap (\mathcal{D}') \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 2 - k \\ -2 - 3t = 1 + 2k \\ -1 - t = k \end{cases}$$

$$M(x; y; z) \in (\mathcal{D}) \cap (\mathcal{D}') \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + k = 1 & [1] \\ 3t + 2k = -1 & [2] \\ t + k = -1 & [3] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 & [1] - [3] \\ t = 1 & [2] - 2 \times [3] \\ t + k = -1 \end{cases}$$

Ce qui est impossible ; donc  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{D}')$  n'ont pas de point d'intersection.

Par conséquent,  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{D}')$  **ne sont pas coplanaires**.

3) a)  $4x_A + y_A + 5z_A + 3 = 4 - 2 - 5 + 3 = 0$  d'où  $A$  appartient à  $(\mathcal{P})$ .

$4x_B + y_B + 5z_B + 3 = 12 - 5 - 10 + 3 = 0$  d'où  $B$  appartient à  $(\mathcal{P})$ .

Comme  $(\mathcal{P})$  contient deux points de la droite  $(\mathcal{D})$ , alors  $(\mathcal{P})$  **contient la droite  $(\mathcal{D})$** .

$$\text{b) } M(x; y; z) \in (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{D}') \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y + 5z + 3 = 0 \\ x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 4k + 1 + 2k + 5k + 3 = 0 \\ x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3k + 12 = 0 \\ x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{12}{3} = -4 \\ x = 2 + 4 = 6 \\ y = 1 - 8 = -7 \\ z = -4 \end{cases}$$

Donc **la droite  $(\mathcal{D}')$  et le plan  $(\mathcal{P})$  sont sécants en un point  $C$  de coordonnées  $(6; -7; -4)$ .**

4) a)  $\vec{u} \cdot \vec{w} = (-1) \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ , alors  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont orthogonaux.

De plus, le point  $C$  appartient aux deux droites. Donc,  $(\Delta)$  et  $(\mathcal{D}')$  **sont perpendiculaires**.

b)  $\vec{AB} \cdot \vec{w} = 2 \times 1 + (-3) \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$ , alors  $\vec{AB}$  et  $\vec{w}$  sont orthogonaux.

Par suite,  $(\mathcal{D})$  et  $(\Delta)$  sont perpendiculaires.

Une représentation paramétrique de  $(\Delta)$  est : 
$$\begin{cases} x = 6 + \alpha \\ y = -7 + \alpha \\ z = -4 - \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbf{R})$$

$$\begin{aligned} M(x; y; z) \in (\mathcal{D}) \cap (\Delta) &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t = 6 + \alpha \\ -2 - 3t = -7 + \alpha \\ -1 - t = -4 - \alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2t - \alpha = 5 & [1] \\ 3t + \alpha = 5 & [2] \\ t - \alpha = 3 & [3] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 & [1] - [3] \\ \alpha = 5 - 3 \times 2 = -1 \\ 2 - (-1) = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 1 = 5 \\ y = -7 - 1 = -8 \\ z = -4 - (-1) = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent,  $(\Delta)$  coupe  $(\mathcal{D})$  **perpendiculairement en un point  $E$  de coordonnées  $(5; -8; -3)$ .**

### Exercice 3 (enseignement obligatoire)

1) Un tirage d'une boule blanche de l'urne est une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{1}{3}$ .

Cette épreuve est répétée dix fois de manière indépendante puisque l'on fait dix tirages successifs et après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne.

Soit  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches obtenues.  $X$  suit alors la loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = \frac{1}{3}$ .

D'où, pour tout entier  $k$  compris entre 0 et 10,  $p(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{10-k}$ .

Donc la probabilité de tirer exactement trois boules blanches est égale à  $p(X = 3)$ , c'est-à-dire à  $\binom{10}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^7$ . **La proposition 1 est donc fautive.**

2)  $p(X > a) = 1 - p(X \leq a)$ , alors  $p(X > a) = p(X \leq a)$  équivaut à  $1 - p(X \leq a) = p(X \leq a)$ , c'est-à-dire à  $p(X \leq a) = \frac{1}{2}$ .

Or  $p(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} + e^0 = 1 - e^{-\lambda a}$ .

D'où :  $p(X > a) = p(X \leq a) \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda a = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

Donc le réel  $a$  tel que  $p(X > a) = p(X \leq a)$  est égal à  $\frac{\ln(2)}{\lambda}$ .

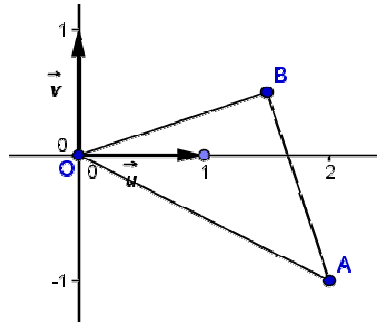
Par suite, **la proposition 2 est vraie.**

3)  $z = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ . Alors, pour tout entier naturel  $n$ ,  $z^n = 2^n e^{-i\frac{n\pi}{3}}$ .

Si  $n$  est un multiple de 3, il existe un entier  $k$  tel que  $n = 3k$ . Ainsi,  $z^{3k} = 2^{3k} e^{-ik\pi}$  ou encore  $z^{3k} = 2^{3k} (\cos(-k\pi) + i \sin(-k\pi)) = 8^k \cos(k\pi)$  car  $\sin(-k\pi) = 0$  pour tout entier  $k$ .

Par suite,  $z^{3k}$  est un réel. **La proposition 3 est donc vraie.**

4) Si le triangle  $OAB$  est rectangle, ce ne peut être qu'au point  $B$ .



$$\frac{0-b}{a-b} = \frac{-\left(\frac{1+i}{2}\right)a}{a-\left(\frac{1+i}{2}\right)a} = \frac{-\left(\frac{1+i}{2}\right)}{1-\left(\frac{1+i}{2}\right)} = \frac{-\left(\frac{1+i}{2}\right)}{\frac{2}{2}-\left(\frac{1+i}{2}\right)}$$

$$\text{Alors } \frac{0-b}{a-b} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{-1-i-i+1}{2} = -i$$

On en déduit que :

$$\frac{BO}{BA} = \frac{|0-b|}{|a-b|} = \frac{|0-b|}{|a-b|} = |-i| = 1, \text{ alors } OAB \text{ est isocèle en } B.$$

$$(\overline{BA}, \overline{BO}) = \arg\left(\frac{0-b}{a-b}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}, \text{ alors } OAB \text{ est rectangle en } B.$$

**La proposition 4 est donc vraie.**

$$5) (\overline{OM}, \overline{OM'}) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg\left(\frac{-10}{z}\right) = \arg\left(\frac{-10}{zz}\right) = \arg\left(\frac{-10}{|z|^2}\right) = \pi \text{ car } \frac{-10}{|z|^2} \text{ est un réel négatif.}$$

Donc, pour tout point  $M$  d'affixe non nulle, les points  $O$ ,  $M$  et  $M'$  sont alignés.

**La proposition 5 est donc fautive.**

### Exercice 4

#### Partie A

1) On a  $u = v + w$  avec  $v(x) = x^2 - 2$  et  $w(x) = \ln(x)$ .

La fonction  $u$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  en tant que somme de fonctions dérivables sur

$]0; +\infty[$ . Alors :  $u' = v' + w'$  avec  $v'(x) = 2x$  et  $w'(x) = \frac{1}{x}$ .

D'où :  $u'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ . Comme  $x > 0$ , alors  $u'(x) > 0$ .

Par conséquent, **la fonction  $u$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty \text{ (par somme de limites).}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \text{ (par somme de limites).}$$

2)a) Comme la fonction  $u$  est continue (car dérivable), strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$  et que 0 appartient à  $u(]0 ; +\infty[) = \mathbf{R}$ , d'après le théorème de la valeur intermédiaire, **l'équation  $u(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0 ; +\infty[$ .**

b) À l'aide de la calculatrice, on obtient l'encadrement suivant :  **$1,31 < \alpha < 1,32$ .**

3) Comme la fonction  $u$  est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$  et que  $u(\alpha) = 0$ , on en déduit le tableau de signes suivant :

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$	
$u(x)$		-	0	+

4) On sait que  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $u(x) = 0$ . Ainsi  $\alpha^2 - 2 + \ln(\alpha) = 0$ . Par suite,  **$\ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$ .**

### Partie B

1) On remarque que  $f = m + n^2$  avec  $m(x) = x^2$  et  $n(x) = 2 - \ln(x)$ .

Les fonctions  $m$  et  $n$  sont dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ , alors  $f$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ .

D'où  $f' = m' + 2nn'$  avec  $m'(x) = 2x$  et  $n'(x) = -\frac{1}{x}$ .

Donc, **pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = 2x + 2 \times \left(-\frac{1}{x}\right)(2 - \ln(x)) = \frac{2x^2 - 4 + 2\ln(x)}{x} = \frac{2u(x)}{x}$ .**

2) Comme  $x > 0$ , alors le signe de  $f'(x)$  dépend de celui de  $u(x)$ . D'après la question 3) de la partie A, on en déduit les variations de  $f$ :  **$f$  est strictement décroissante sur  $]0 ; \alpha]$  et strictement croissante sur  $[\alpha ; +\infty[$ .**

### Partie C

1)  **$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (\ln(x)-2)^2} = \sqrt{x^2 + (2 - \ln(x))^2} = \sqrt{f(x)}$ .**

2) a) On remarque que  $g = h \circ f$  où  $h$  est la fonction racine carrée.

La fonction  $h$  est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ , donc d'après le théorème sur les variations d'une fonction composée, **les variations de  $g$  sont les mêmes que celles de  $f$  sur l'ensemble de définition de  $f$ , c'est-à-dire sur  $]0 ; +\infty[$ .**

Remarque : On aurait pu également dire que  $g' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$ , et comme  $\sqrt{f} > 0$  sur  $]0 ; +\infty[$ , alors le signe de  $g'$  est le même que celui de  $f'$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

b) D'après les résultats précédents et ceux de la partie B, on peut dire que  $AM$  est minimale lorsque  $x = \alpha$ , c'est-à-dire que  **$AM$  est minimale en un point  $P$  de coordonnées  $(\alpha ; \ln(\alpha))$ .**

c)  $AP = \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 + (2 - \ln(\alpha))^2} = \sqrt{\alpha^2 + (2 - (2 - \alpha^2))^2}$  d'après la question 4) de la partie

A. D'où  $AP = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)} = \sqrt{\alpha^2} \times \sqrt{1 + \alpha^2}$ .

Or  $\alpha > 0$ , alors  $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ ; par conséquent,  **$AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$ .**

3) La droite  $(AP)$  a pour coefficient directeur  $\frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{\ln(\alpha) - 2}{\alpha - 0} = \frac{2 - \alpha^2 - 2}{\alpha} = -\alpha$ .

La tangente à  $\Gamma$  en  $P$  a pour coefficient directeur le nombre dérivé de la fonction logarithme népérien en  $\alpha$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{\alpha}$ .

Or  $(-\alpha) \times \frac{1}{\alpha} = -1$ , donc **la droite  $(AP)$  est perpendiculaire à la tangente à  $\Gamma$  en  $P$ .**

#### **Exercice 4 (enseignement de spécialité)**

1) Comme  $B$  est l'image de  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , alors

$$z_B = e^{i\frac{\pi}{2}} z_A = i(2 - i) = 1 + 2i.$$

Comme  $I$  est le milieu du segment  $[AB]$ , alors  $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 - i + 1 + 2i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ .

Soit  $s$  la similitude directe de centre  $A$ ; son écriture complexe est de la forme  $z' - z_A = a(z - z_A)$ , c'est-à-dire  $z' - (2 - i) = a(z - (2 - i))$  où  $a$  est un nombre complexe.

De plus,  $s$  transforme  $I$  en  $O$ , alors  $0 - (2 - i) = a\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i - (2 - i)\right)$ .

$$\text{Or } 0 - (2 - i) = a\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i - (2 - i)\right) \text{ équivaut à } a = \frac{-2 + i}{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i} = \frac{-4 + 2i}{-1 + 3i} = \frac{(-4 + 2i)(-1 - 3i)}{(-1)^2 + 3^2} = 1 + i.$$

Par conséquent, l'écriture complexe de  $s$  est :

$$z' = (1 + i)z - (1 + i)(2 - i) + 2 - i = (1 + i)z - (2 - i + 2i + 1) + 2 - i = (1 + i)z - 1 - 2i.$$

**La proposition 1 est donc vraie.**

2) Soit (E) l'équation  $3x - 5y = 2$ .

Comme  $3 \times (-1) - 5 \times (-1) = 2$ , alors le couple  $(-1 ; -1)$  est une solution particulière de (E).

$$\text{D'où on a : } \begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 3 \times (-1) - 5 \times (-1) = 2 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre ces deux équations, on obtient :

$$3x - 5y = 3 \times (-1) - 5 \times (-1), \text{ ou encore } 3(x + 1) = 5(y + 1) \text{ (E')}.$$

Alors on en déduit que 5 divise  $3(x + 1)$ ; comme 5 et 3 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise  $x + 1$ .

Il existe donc un entier  $k$  tel que  $x + 1 = 5k$ , c'est-à-dire  $x = 5k - 1$ .

En remplaçant  $x$  par  $5k - 1$  dans l'équation (E'), on obtient :  $y + 1 = 3k$ , c'est-à-dire  $y = 3k - 1$ .

Réciproquement, vérifions que les couples  $(5k-1, 3k-1)$ , avec  $k$  un entier relatif, sont solutions de l'équation (E).  $3(5k-1) - 5(3k-1) = 15k - 3 - 15k + 5 = 2$ .

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) sont les couples  $(5k-1, 3k-1)$ , avec  $k$  un entier relatif. **La proposition 2 est donc vraie.**

3) Tableau des « congruences modulo 3 » :

$x$	0	1	2
$x^2$	0	1	1

On en déduit les congruences de  $x^2 + y^2$  modulo 3 :

	$y^2$	0	1
$x^2$			
	0	0	1
	1	1	2

Donc  $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}$  équivaut à  $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$  et  $y^2 \equiv 0 \pmod{3}$ , c'est-à-dire à  $x \equiv 0 \pmod{3}$  et  $y \equiv 0 \pmod{3}$ . **La proposition 3 est donc fausse.**

4) Pour tout entier naturel  $k$  tel que  $2 \leq k \leq n$ ,  $k$  divise  $n!$ . Il existe alors un entier  $m$  tel que  $n! = mk$  ; par suite,  $n! + k = mk + k = k(m+1)$ .

$n! + k$  est divisible par un nombre supérieur ou égal à 2 et n'est donc pas premier.

**La proposition 4 est donc vraie.**

5) Soit (E') l'équation  $x^2 - 52x + 480 = 0$ .

Cette équation admet deux solutions dans  $\mathbf{N}$  : 12 et 40.

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls tels que  $\text{PGCD}(a; b) = 12$  et  $\text{PPCM}(a; b) = 40$ .

Alors  $ab = 12 \times 40$  et il existe deux entiers premiers entre eux  $a'$  et  $b'$  tels que  $a = 12a'$  et  $b = 12b'$ .

On en déduit que  $12a' \times 12b' = 12 \times 40$ , c'est-à-dire  $12a'b' = 40$  ; ce qui est impossible car 12 ne divise pas 40. **La proposition 5 est donc fausse.**