

DÉRIVATION

Cours

Terminale S

Pour tout ce chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I , x_0 est un réel appartenant à I , h un réel différent de 0 tel que $x_0 + h$ appartient à I et (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Nombre dérivé de f en a et fonction dérivée

1) Rappels de Première

• On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un nombre réel A vérifiant l'une des propositions suivantes :

$$- A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$- A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

• Le nombre réel A s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 ; il est noté $f'(x_0)$.

• $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à (C_f) au point d'abscisse x_0 . Une équation réduite de cette tangente est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

• On dit que f est dérivable sur l'intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout nombre réel x appartenant à I , On appelle fonction dérivée ou dérivée de la fonction f , la fonction, notée f' , qui, à tout nombre réel x appartenant à I , fait correspondre le nombre dérivé en x .

Si f' est dérivable sur I , sa dérivée, notée f'' , est appelée dérivée seconde de f ou dérivée d'ordre 2 de f .

Si f'' est dérivable sur I , sa dérivée notée $f^{(3)}$ est appelée dérivée troisième de f .

Ainsi de suite, on définit les dérivées d'ordre 4 notée $f^{(4)}$, d'ordre 5 notée $f^{(5)}$ et, d'une façon générale, la dérivée d'ordre n notée $f^{(n)}$.

En cinématique, lorsque $f(t)$ est la distance parcourue par un mobile sur une ligne droite depuis l'instant origine jusqu'à l'instant t , les nombres $f'(t)$ et $f''(t)$ sont respectivement la vitesse instantanée et l'accélération instantanée du mobile à l'instant t .

Les fonctions usuelles suivantes sont dérivables sur l'intervalle donné :

Propriétés 1 :

$f(x)$	k	$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	\sqrt{x}	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	0	nx^{n-1}	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$
intervalles de validité	$] -\infty ; +\infty [$	$] -\infty ; +\infty [$	$] 0 ; +\infty [$ ou $] -\infty ; 0$	$] 0 ; +\infty [$	$] -\infty ; +\infty [$	$] -\infty ; +\infty [$

3. Dérivées et opérations

Propriétés 3 : Soit deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I et un nombre réel k . Les fonctions $u + v$, ku et uv sont dérivables sur I . Si de plus, v ne s'annule pas sur I , alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I .

Fonction	$u + v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
Dérivée	$(u + v)' = u' + v'$	$(ku)' = k u'$	$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Remarque : Toute fonction polynôme, rationnelle, ainsi que les fonctions sinus et cosinus, sont dérivables en tout nombre réel où elles sont définies.

6. Applications de la dérivation

1) Utilisation du nombre dérivé pour certaines limites

On peut utiliser le nombre dérivé pour déterminer certaines limites.

En effet, si l'expression donnée est de la forme $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, où f est une fonction dérivable

en x_0 , alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Exemple : Dans la recherche de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, on reconnaît une expression de la forme

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, avec $f(x) = \sin x$ et $x_0 = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = f'(0) = \cos 0 = 1$.

2) Fonction dérivée et sens de variation d'une fonction

Théorème 4 (admis) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Si la dérivée f' est nulle sur I , alors f est constante sur I .

Si la dérivée f' est strictement positive sur I , sauf en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .

Si la dérivée f' est strictement négative sur I , sauf en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

Exemple :

La fonction $x \mapsto x^3$ a pour dérivée la fonction $x \mapsto 3x^2$.

Cette dérivée est strictement positive sur \mathbf{R} et s'annule une seule fois en 0, donc la fonction cube est strictement croissante sur \mathbf{R} .

Pour certaines fonctions, l'étude du signe de f' ne peut pas se faire directement et c'est l'étude d'une fonction auxiliaire qui peut permettre de trouver ce signe.