



**Solution :**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

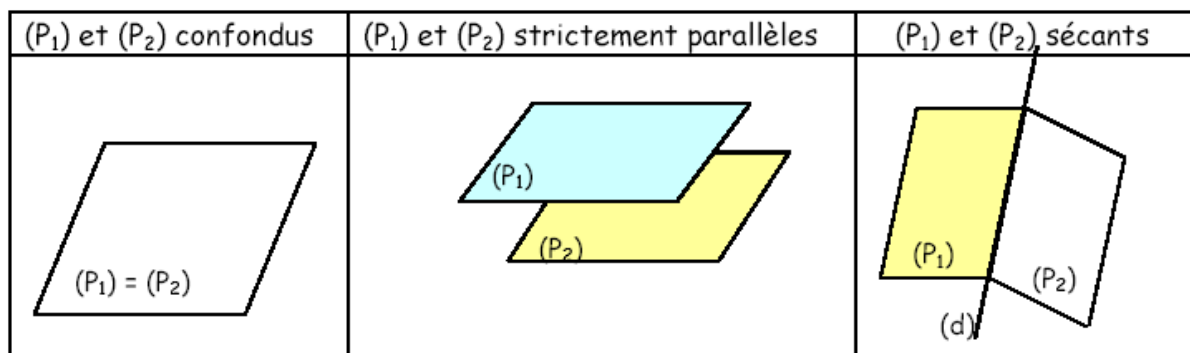
## 2. Intersection de droites et de plans

### 1) Intersection de deux plans ( $P_1$ ) et ( $P_2$ )

#### a) Le point de vue géométrique

Soit  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  des vecteurs normaux respectivement des plans ( $P_1$ ) et ( $P_2$ ).

- Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires, alors ( $P_1$ ) et ( $P_2$ ) sont parallèles ; ils n'ont aucun point commun.
- Si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  ne sont pas colinéaires, alors ( $P_1$ ) et ( $P_2$ ) sont sécants ; leur intersection est une droite.



#### b) Le point de vue algébrique

**Propriété 4 :** Les plans d'équations  $ax + by + cz + d = 0$  et  $a'x + b'y + c'z + d' = 0$  sont sécants si, et seulement si,  $(a, b, c)$  n'est pas proportionnel à  $(a', b', c')$ .

Lorsque  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  ne sont pas colinéaires, tout point M de la droite d'intersection (d) des coordonnées  $(x ; y ; z)$  vérifiant le système d'équations : (S) 
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Pour obtenir une représentation paramétrique de (d), on prend pour paramètre  $k$  une des trois variables  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , puis on résout le système de deux équations avec les deux inconnues restantes en fonction de  $k$ .

**Exemple :** Soit les plans ( $P_1$ ) et ( $P_2$ ) d'équations  $x - y + z + 3 = 0$  et  $-x + 2y - 3z = 0$ . Un vecteur normal de ( $P_1$ ) est  $\vec{n}(1 ; -1 ; 1)$  et un vecteur normal de ( $P_2$ ) est  $\vec{n}'(-1 ; 2 ; -3)$ . Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ces plans sont sécants selon une droite (d).

En posant  $z = k$ , on obtient : 
$$\begin{cases} x = k - 6 \\ y = 2k - 3 \\ z = k \end{cases}$$
, avec  $k$  réel.

On reconnaît une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point



b) Le point de vue algébrique

**Propriété 5** : Le plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  et la droite d'équations  $\begin{cases} x = x_A + k\alpha \\ y = y_A + k\beta, \\ z = z_A + k\gamma \end{cases}$

avec  $k$  réel, sont sécants si, et seulement si,  $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$ .

Si (P) et ( $\Delta$ ) sont sécants, la détermination de leur point d'intersection revient à la résolution du système formé par l'équation de (P) et les équations de ( $\Delta$ ). Dans la première équation, on substitue les valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$  obtenues dans les trois dernières équations ; ceci permet de déterminer  $k$ , puis de trouver les coordonnées ( $x$  ;  $y$  ;  $z$ ) du point d'intersection.

c) Application

1) Dans un repère orthonormé ( $O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ), le plan (P) a pour équation cartésienne

$5x + y - z + 3 = 0$  et la droite ( $\Delta$ ) a pour représentation paramétrique :  $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t, t \text{ réel.} \\ z = 3 - t \end{cases}$

Étudier l'intersection de la droite ( $\Delta$ ) et du plan (P).

2) Étudier l'intersection de la droite ( $\Delta$ ) passant par  $A(2 ; 1 ; -4)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(2 ; -2 ; 4)$  et du plan (P) d'équation  $x + 2y - z + 2 = 0$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

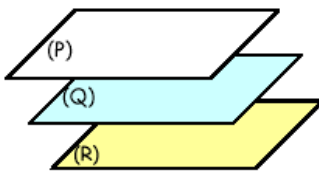
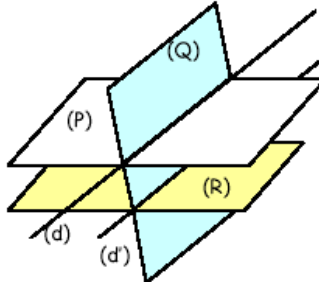
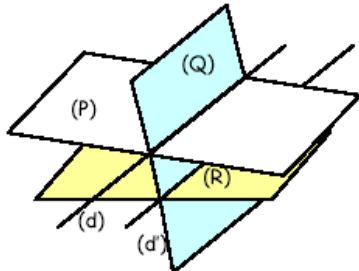
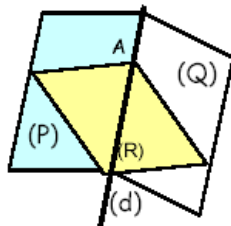
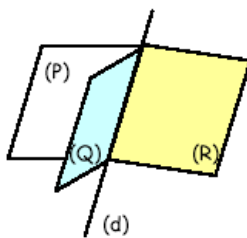

.....

.....

### 3. Intersection de trois plans

#### 1) Le point de vue géométrique

Soit (P), (Q) et (R) trois plans de l'espace.

Ils n'ont pas de point commun		
		
Ils ont un seul point commun	Leur intersection est une droite	Leur intersection est un plan
		

## 2) Le point de vue algébrique

On suppose que (P), (Q) et (R) ont respectivement pour équation :

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ avec } (a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0),$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0, \text{ avec } (a' ; b' ; c') \neq (0 ; 0 ; 0),$$

et  $a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \text{ avec } (a'' ; b'' ; c'') \neq (0 ; 0 ; 0).$

Déterminer l'intersection de ces trois plans revient à résoudre le système de trois équations

$$\text{à trois inconnues : } \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases} .$$

- Si le système se réduit à deux équations (par exemple lorsque deux équations sont équivalentes), l'intersection est la droite dont un système d'équations cartésiennes est formé par ces deux équations.

- Si le système a un seul triplet solution, l'intersection de ces trois plans est réduite à un point.

## 3) Applications

### a) Application 1

Dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, les plans (P), (Q) et (R) ont pour équations respectives  $x + y - z = 4$ ,  $3x - y + z = 0$  et  $-2x + 3y - 3z = 7$ .

Déterminer l'intersection de ces trois plans.

### b) Application 2

Dans le plan rapporté à un repère, existe-t-il une parabole P d'équation  $y = ax^2 + bx + c$ , passant par les points A(1 ; 1), B(-1 ; 5) et C(2 ; 3) ?