a) *Application 1*

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par f(x) = x^2, et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Calculer, à l'aide, d'une primitive de f, l'aire du domaine D situé sous la courbe.

Solution : Comme la fonction *f* est continue et positive sur [0 ; 1], aire ($\mathcal{D}$) = $\int_0^1 x^2 dx$.

La fonction F : $x \mapsto \frac{1}{3}x^3$ est une primitive de *f* sur [0 ; 1], donc $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

On a alors : aire ($\mathcal{D}$) = $\frac{1}{3}$.

Remarque : La connaissance d'une primitive de la fonction continue *f* permet de calculer l'aire de $\mathcal{D}$.

b) *Application 2*

Calculer, à l'aide des primitives, les intégrales suivantes :

- $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$
- $\int_e^{e^3} \frac{1}{x \ln x} dx$

Solutions :

- $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}$.

En effet, si on note *f* la fonction définie sur [1 ; e] par *f* (x) = $\frac{\ln x}{x}$, alors *f* (*x*) = *u*'(*x*) *u*(*x*) avec *u*(*x*) = ln *x*.

La fonction F définie sur I par $F(x) = \frac{1}{2}u^2(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de *f* sur I.

- $\int_e^{e^3} \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln(\ln x)]_e^{e^3} = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$.

En effet, si on note *f* la fonction définie sur [e ; e^3] par *f* (*x*) = $\frac{1}{x \ln x}$, alors $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec *u*(*x*) = ln *x*.

La fonction F définie sur I par $F(x) = \ln(u(x)) = \ln(\ln x)$ est une primitive de *f* sur I.

c) *Application 3*

Soit F la fonction définie sur ***R*** *par F(x)=* $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ *. Déterminer le sens de variation de F sur* ***R****.*

Solution :

La fonction *f* : $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur **R**, la fonction F est une primitive de *f* sur **R** donc F est dérivable sur **R** et pour tout réel *x*, $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Pour tout réel *x*, F'(*x*) > 0. La fonction F est strictement croissante sur **R**.