DEVOIR MAISON N° 1

Barycentres, lieux géométriques et fonctions	***Pour le 2 octobre 2009***

Soit trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit t un réel de l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

On note G_t le barycentre du système $\{(A, t^2+1)\ ;\ (B,t)\ ;\ (C,-t)\}$.

Le but de cette partie est de déterminer le lieu des points G_t lorsque t décrit l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

1) Visualisation à l'aide du logiciel Geospace (que vous trouverez ici sur le site MATHOCPF (http://math.cpf.edu.lb/log_geom.html) ou sur le CD que je vous ai gravé).

a) Construire les points A, B, C, G_1 et G_{-1}.

Attention ! Le logiciel n'accepte pas la notation G-1 ; nommez donc ce point G', par exemple)

b) Construire le point G_t puis visualiser l'ensemble des points G_t lorsque t décrit l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

- *D'abord, vous devez créer une variable numérique que vous nommerez t.*
- *Puis, faire afficher la variable numérique déjà définie t (avec 2 décimales)*
- *Et enfin, construire G_t (comme le logiciel n'accepte pas facilement la notation G_t , nommez alors ce point G).*

c) Quelle est la nature de l'ensemble précédent ?

2) Justification mathématique

a) Justifier, pour tout réel t de $[-1\,;\,1]$ l'existence du point G_t.

b) Montrer que pour tout réel t de $[-1\,;\,1]$, on a l'égalité : $\overrightarrow{AG_t} = \dfrac{-t}{t^2+1}\overrightarrow{BC}$.

c) Démontrer la conjecture faite avec le logiciel. On pourra utiliser les variations de la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$.

3) Prolongements

a) Déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que :

$$\left\|2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\,\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|.$$

b) Déterminer l'ensemble (F) des points M de l'espace tels que :

$$\left\|2\,\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\,\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|.$$

C. Lainé