

DEVOIR MAISON N° 10

**Fonction exponentielle et
équations différentielles**

Pour le 5 février 2010

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$.

a) Démontrer que $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$.

b) Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Étudier le sens de variation de la fonction f .

Partie B

1) On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t , est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dans \mathbf{R} . La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle (E_1) $y' = \frac{y}{4}$.

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1) .

b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs.

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u , ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u .

a) On suppose que, pour tout réel positif t , on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h .

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire

l'expression de la fonction h , puis celle de la fonction u .

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?