

## CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 10

**Fonction exponentielle et  
équations différentielles**

**Pour le 5 février 2010**

*France, juin 2005*

### Partie A

a) Soit un réel  $x$ . 
$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}} \times e^{-\frac{x}{4}}}{\left(2 + e^{\frac{x}{4}}\right) \times e^{-\frac{x}{4}}} = \frac{3}{2e^{-\frac{x}{4}} + 1}.$$

b) •  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{4} = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{4}} = 0$  (limite d'une fonction composée).

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + e^{\frac{x}{4}}\right) = 2$  (par somme de limites).

Donc, par quotient de limites,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  (par quotient de limites).

• On sait que  $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{4}\right) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{4}} = 0$  (limite d'une fonction composée).

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + 2e^{-\frac{x}{4}}\right) = 1$  (par somme de limites).

Donc, par quotient de limites,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  (par quotient de limites).

c) On remarque que  $f = \frac{3e^u}{2 + e^u}$  avec  $u(x) = \frac{x}{4}$ .

La fonction  $u$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ , alors la fonction  $e^u$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ .

De plus, la fonction  $2 + e^u$  est dérivable et strictement positive sur  $\mathbf{R}$ .

Donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ .

Alors  $f' = 3 \times \frac{(e^u)'(2 + e^u) - e^u(2 + e^u)'}{(2 + e^u)^2} = 3 \times \frac{u'e^u(2 + e^u) - e^u u'e^u}{(2 + e^u)^2} = 3 \times \frac{2u'e^u}{(2 + e^u)^2}$  avec

$$u'(x) = \frac{1}{4}. \text{ Donc, pour tout réel } x, f'(x) = \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{x}{4}}}{\left(2 + e^{\frac{x}{4}}\right)^2}.$$

Comme  $e^{\frac{x}{4}} > 0$  pour tout réel  $x$ , alors  $f'(x) > 0$  pour tout réel  $x$ .

Par suite, **la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ .**

## Partie B

1) a) Les solutions de l'équation différentielle (E<sub>1</sub>) sont les fonctions définies sur  $[0 ; +\infty[$  par  $t \mapsto C e^{\frac{1}{4}t}$  où  $C$  est une constante réelle.

b) À la date  $t = 0$ , la population comprend 100 rongeurs ; d'où :  $g(0) = 1$ .

D'après la question précédente,  $g(0) = 1$  équivaut à  $C e^{\frac{0}{4}} = 1$ , c'est-à-dire à  $C = 1$ .

Par conséquent,  $g(t) = e^{\frac{1}{4}t}$ , pour tout réel  $t$  de  $[0 ; +\infty[$ .

c) On résout l'inéquation  $g(t) \geq 3$ .

Or  $g(t) \geq 3$  équivaut à  $e^{\frac{t}{4}} \geq 3$ , c'est-à-dire à  $\frac{t}{4} \geq \ln(3)$ , ou encore à  $t \geq 4\ln(3)$ .

Comme  $4\ln(3) \approx 4,4$ , alors **la population dépassera 300 rongeurs pour la première fois après 5 années.**

2) a) Comme  $h = \frac{1}{u}$ , alors  $h' = -\frac{u'}{u^2}$ .

$$\begin{aligned}
 u \text{ satisfait aux conditions (E}_2) &\Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{u'(t)}{u(t)^2} = -\frac{1}{4u(t)} + \frac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ \frac{1}{u(0)} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc, la fonction  $u$  satisfait aux conditions (E<sub>2</sub>) si et seulement si la fonction  $h$  satisfait

$$\text{aux conditions (E}_3) : \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

b) La solution particulière constante est déterminée en résolvant l'équation  $y' = 0$  ; alors une solution particulière est la fonction  $t \mapsto \frac{1}{3}$ .

Par conséquent, les solutions de l'équation différentielle  $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$  sont les

fonctions définies sur  $[0 ; +\infty[$  par  $t \mapsto k e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$  où  $C$  est une constante réelle.

Par suite,  $h(t) = k e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}$ . Or  $h(0) = 1$  ; d'où :  $k + \frac{1}{3} = 1$  et alors  $k = \frac{2}{3}$ .

Par conséquent,  $h(t) = \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$ , pour tout réel  $t$  de  $[0 ; +\infty[$ .

Comme  $u = \frac{1}{h}$ , alors  $u(t) = \frac{1}{\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2e^{-\frac{t}{4}} + 1}$ .

c) On remarque que  $u$  est la fonction étudiée dans la partie A. Donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 3$  (d'après la question b) de la partie A).

Par conséquent, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , la population de petits rongeurs se stabilisent vers 300 individus.