DEVOIR MAISON N° 11

Étude de la fonction tangente	*Pour le 1er mars 2010*

L'objectif de ce devoir maison est d'étudier la fonction tangente et d'étudier certaines de ses propriétés (***qui seront à retenir pour le cours***).

1) Résoudre, sur $]-\pi ; \pi[$, l'équation : cos x = 0.

En déduire toutes les solutions, sur **R**, de cette équation.

2) Soit la fonction tangente, notée tan, définie sur D = $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \right\}$ par

$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Étudier la parité de cette fonction.

b) Démontrer que la fonction tangente est périodique de période π (on dit également π-périodique).

c) Expliquer pourquoi on peut se contenter d'étudier la fonction tangente sur l'intervalle $\mathtt{I} = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

3) Étudier les limites de la fonction tangente en 0^+ et en $\frac{\pi}{2}^-$.

En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on précisera la nature et l'équation.

4) Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les valeurs exactes :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
tan x				

5) Montrer que, pour tout x de $\mathtt{I}$, on a : $(\tan)'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

En déduire le tableau de variations de la fonction tangente sur l'intervalle I.

6) a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathtt{I}$ par $g(x) = \tan(x) - x$.

c) Démontrer que pour tout $x \in \mathtt{I}$, on a : $\tan(x) \geq x$.

d) En déduire, la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente T.

7) Tracer, très soigneusement, les droites Δ et T, puis la courbe $\mathscr{C}$, sur l'intervalle [- 2π ; 2π].

8) On rappelle que pour tous réels a et b, on a les formules d'additions suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

En déduire une formule liant $\tan(a+b)$ à $\tan(a)$ et $\tan(b)$, pour des réels a, b et $a + b$ appartenant à D.

9) Démontrer que pour tout a de $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\tan(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{\sin(2a)}$.

En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

C. Lainé