CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 11

Étude de la fonction tangente	*Pour le 1er mars 2010*

1) • Sur]- π ; π[, l'équation : cos x = 0 admet pour solutions : $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Donc, $\mathbf{S_{]-\pi\,;\,\pi[} = \left\{-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right\}}$.

• Sur $\mathbb{R}$, l'équation : cos x = 0 admet pour solutions : $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Donc :

$\mathbf{S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$ ou encore $\mathbf{S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

2) a) D est un ensemble centré en O (ce qui signifie que pour tout x appartenant à D, (-x) appartient lui aussi à D).

De plus, pour tout x de D, $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

Par conséquent, **la fonction tangente est impaire sur D**.

b) Pour x appartenant à D, x + π appartient à D ; d'où : $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

Par conséquent, **la fonction tangente est périodique de période π**.

c) Comme la fonction tangente est périodique de période π, alors on se contentera de l'étudier sur un intervalle d'amplitude cette période, par exemple $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

De plus, la fonction tangente est impaire, on peut donc réduire l'intervalle en deux parties, c'est-à-dire $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. *(On obtiendra la partie de la courbe sur par symétrie par rapport à l'origine O du repère.)*

3) • $\mathbf{\lim\limits_{x \to 0} \tan x = 0}$ car $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

• $\mathbf{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = 0}$ car $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$

Par conséquent, **la courbe C admet une asymptote Δ verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}$**.

4)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

C.Lainé

5) Soit x un élément de I.

$$\tan' x = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2}.$$

Or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, d'où : $\mathbf{\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}}$.

De plus, $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x$.

Par conséquent, **pour tout x de I,** $\mathbf{\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x}$.

Sens de variation : pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, tan' x > 0.

Par conséquent, **la fonction tangente est strictement croissante sur** $\mathbf{\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[}$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
tan' x	1	+	||
tan x	0	↗	$+\infty$ ||

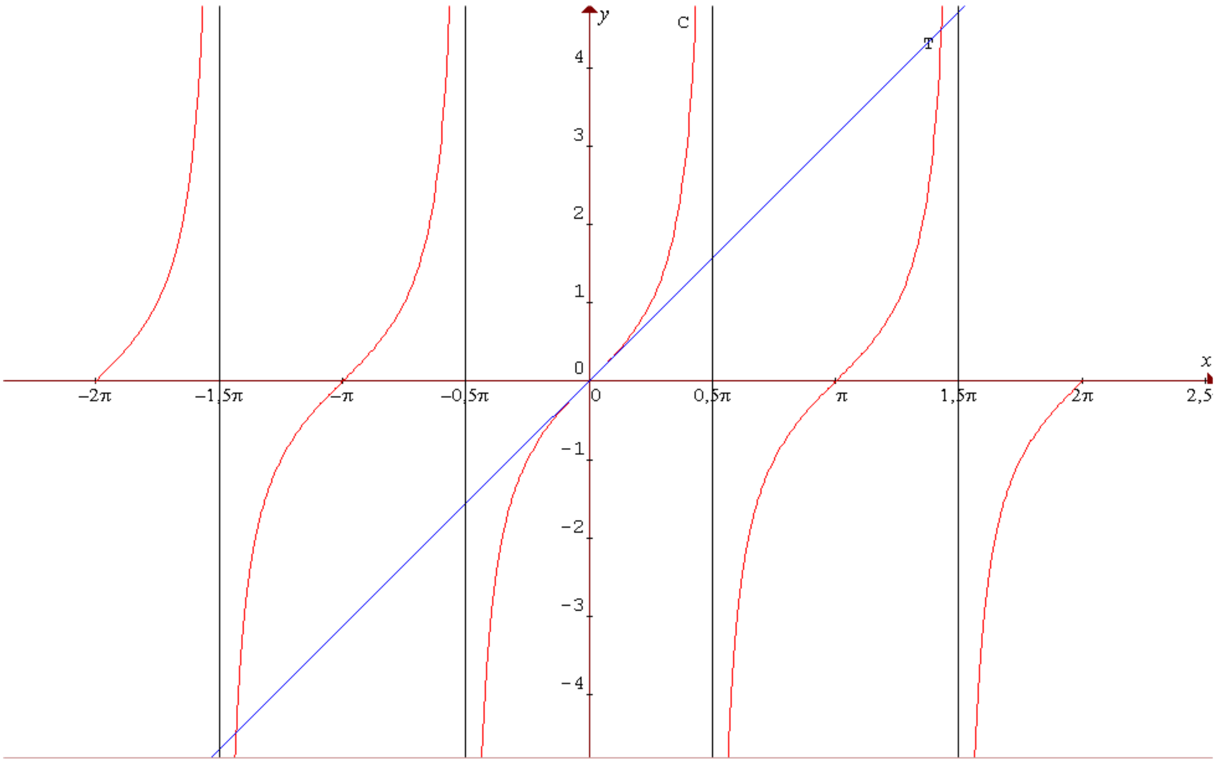
6) a) Une équation de la tangente à une courbe représentant une fonction f dérivable en a est : y = f '(a)(x – a) + f(a).
Or a = 0, d'où f(0) = tan 0 = 0 et f '(0) = 1 + $\tan^2$ 0 = 1.
Donc $\mathcal{T}$ **a pour équation y = x**.

b) La fonction g est dérivable sur I, et pour tout x de I, on a :
g'(x) = tan' x – (x)' = 1 + $\tan^2$ x – 1 = $\tan^2$ x.
Comme $\tan^2$ x est positive, alors **la fonction g est croissante sur I**.

c) Comme g(0) = 0 et que g est croissante sur I, alors g est positive sur I, c'est-à-dire que pour tout x de I, on a tan x – x ≥ 0.
Par conséquent, **pour tout x ∈ I, on a : tan x ≥ x**.

d) D'après la question précédente, on en déduit que :
la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente $\mathcal{T}$ sur I.

7) Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on trace la courbe qui représente la fonction tangente sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, puis par symétrie par rapport à O, on obtient la courbe Γ sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.
Enfin, on applique à Γ les translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$, pour obtenir la courbe $\mathcal{C}$.



8) Soient des réels a, b tels que a + b appartient à D.

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b}=\frac{\dfrac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\dfrac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}=\frac{\dfrac{\sin a}{\cos a}+\dfrac{\sin b}{\cos b}}{1-\dfrac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}.$$

$\cos a \cos b \neq 0$
car $a \in D$ et $b \in D$

Donc $\mathbf{\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}}$.

9) $$\frac{1-\cos(2a)}{\sin(2a)}=\frac{1-(\cos^2 a-\sin^2 a)}{2\sin a\cos a}=\frac{(1-\cos^2 a)+\sin^2 a}{2\sin a\cos a}=\frac{2\sin^2 a}{2\sin a\cos a}=\frac{\sin a}{\cos a}=\tan a.$$

$1-\cos^2 a=\sin^2 a$

Par conséquent, $\mathbf{\tan a=\dfrac{1-\cos(2a)}{\sin(2a)}}$ **pour tout a appartenant à** $\left]\mathbf{0\,;\dfrac{\pi}{2}}\right[$.

- $$\mathbf{\tan\frac{\pi}{8}}=\frac{1-\cos\dfrac{\pi}{4}}{\sin\dfrac{\pi}{4}}=\frac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\mathbf{\sqrt{2}-1}.$$

- $$\mathbf{\tan\frac{\pi}{12}}=\frac{1-\cos\dfrac{\pi}{6}}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=\mathbf{2-\sqrt{3}}.$$