

DEVOIR MAISON N° 12

*Plan médiateur, formule d'Al-Kashi
et fonction rationnelle.*

Pour le 19 mars 2010

**Cet exercice fait partie de ceux qui ont été publiés
sous la responsabilité de l'Inspection Générale de Mathématiques.**

Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(2; 0; 0), B(-1; \sqrt{3}; 0) \text{ et } C(-1; -\sqrt{3}; 0).$$

- 1) Placer sur une figure les points A, B et C dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 2) Montrer que le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre.
- 3) a) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B .
b) Déterminer l'ensemble des points N de l'espace équidistants des points B et C .
c) En déduire que l'ensemble des points P de l'espace équidistants des points A, B et C est l'axe $(O; \vec{k})$.
- 4) Montrer qu'il existe un unique point D dont la troisième coordonnée est positive tel que le tétraèdre $ABCD$ soit régulier et calculer ses coordonnées.
- 5) Soit M un point quelconque du segment $[CD]$. On pose $\overline{CM} = \lambda \overline{CD}$ avec $\lambda \in [0; 1]$.

a) Montrer que $\cos(\widehat{AMB}) = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$.

On définit une fonction f de \mathbf{R} dans \mathbf{R} par la relation :

$$f(\lambda) = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)} = 1 - \frac{1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}.$$

- b) Étudier les variations de la fonction f .
- c) En déduire la position de M pour laquelle l'angle \widehat{AMB} est maximum.
- d) Quelle est la valeur de ce maximum ?