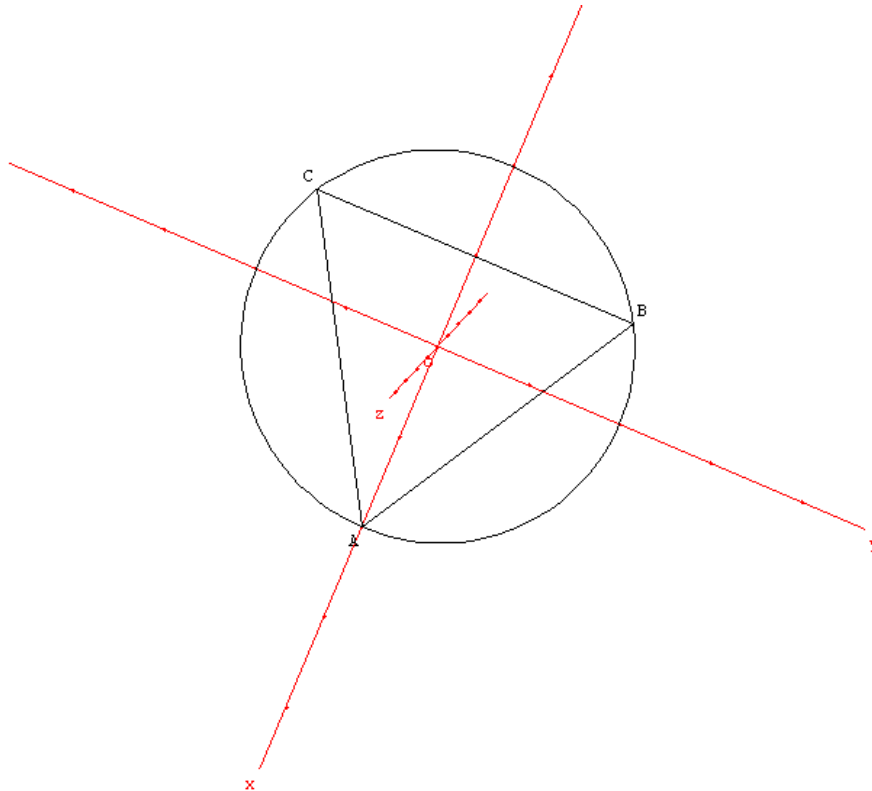


CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 12

*Plan médiateur, formule d'Al-Kashi
et fonction rationnelle.*

Pour le 19 mars 2010

1)



2) On calcule les distances AB , AC et BC ; on trouve que : $AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$.
Donc ABC est équilatéral.

Puis, on calcule les distances OA , OB et OC ; on trouve que : $OA = OB = OC = 2$.
Donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Par conséquent, **le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre.**

3) a) L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est, par définition, le plan médiateur du segment $[AB]$.

Or le plan médiateur du segment $[AB]$ est le plan orthogonal à (AB) passant par O .

Par conséquent, **l'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est le plan orthogonal à (AB) passant par O .**

b) L'ensemble des points N de l'espace équidistants des points B et C est, par définition, le plan médiateur du segment $[BC]$.

Or le plan médiateur du segment $[BC]$ est le plan orthogonal à (BC) passant par O .

Par conséquent, **l'ensemble des points N de l'espace équidistants des points B et C est le plan orthogonal à (BC) passant par O .**

c) L'ensemble des points P de l'espace équidistants des points A , B et C est l'intersection des deux plans trouvés précédemment. Or l'intersection de ces deux plans est l'axe $(O ; \vec{k})$.

Par conséquent, l'ensemble des points P de l'espace équidistants des points A , B et C est l'axe $(O; \vec{k})$.

4) $ABCD$ est tétraèdre régulier si D est équidistant des points A , B et C .

Donc, si le point D existe, d'après la question 3) c), il se trouve sur l'axe $(O; \vec{k})$.

Alors les coordonnées de D sont de la forme $(0; 0; d)$.

Comme $ABCD$ est un tétraèdre régulier, on a $AD = AB$.

Or $AD = \sqrt{(0-2)^2 + (0-0)^2 + (d-0)^2} = \sqrt{4+d^2}$ et $AB = 2\sqrt{3}$.

D'où : $4 + d^2 = 12$, c'est-à-dire que la seule solution positive est $d = 2\sqrt{2}$.

Par conséquent, **il existe un unique point D dont la troisième coordonnée est positive tel que le tétraèdre $ABCD$ soit régulier et ses coordonnées sont $(0; 0; 2\sqrt{2})$.**

5) a) • En utilisant la formule d'Al-Kashi dans le triangle AMB , on obtient :

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2 \times AM \times MB \times \cos(\widehat{AMB}).$$

Or $AM = MB$ (car M est dans le plan médiateur du segment $[AB]$) et $AB^2 = 12$.

D'où, $12 = 2AM^2 - 2 \times AM^2 \times \cos(\widehat{AMB}) = 2AM^2 (1 - \cos(\widehat{AMB}))$.

• En utilisant la formule d'Al-Kashi dans le triangle AMC , on obtient :

$$AM^2 = AC^2 + MC^2 - 2 \times AC \times MC \times \cos(\widehat{ACM}).$$

Or $AC^2 = 12$, $MC^2 = \lambda^2 \times CD^2 = 12\lambda^2$ et $\cos(\widehat{ACM}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

D'où, $AM^2 = 12 + 12\lambda^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \lambda \times \frac{1}{2} = 12\lambda^2 - 12\lambda + 12 = 12(\lambda^2 - \lambda + 1)$.

• On en déduit alors que : $12 = 24(\lambda^2 - \lambda + 1)(1 - \cos(\widehat{AMB}))$, c'est-à-dire que :

$$1 = 12(\lambda^2 - \lambda + 1)(1 - \cos(\widehat{AMB})).$$

Par conséquent, $\cos(\widehat{AMB}) = 1 - \frac{1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)} = \frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$.

b) La fonction f s'écrit sous la forme $1 - \frac{1}{u}$ avec $u: \lambda \mapsto 2(\lambda^2 - \lambda + 1)$.

Comme la fonction u est dérivable et ne s'annule pas sur \mathbf{R} , alors la fonction f est dérivable

sur \mathbf{R} et, pour tout réel λ , on a : $f'(\lambda) = \frac{u'(\lambda)}{u^2(\lambda)} = \frac{2(2\lambda - 1)}{4(\lambda^2 - \lambda + 1)^2}$.

Comme le dénominateur est strictement positif, le signe de $f'(\lambda)$ dépend de celui de $2\lambda - 1$.

Or $2\lambda - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{1}{2}$.

Par conséquent, **la fonction f est décroissante sur $]-\infty; \frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.**

c) D'après la question précédente, on en déduit que la fonction f admet un minimum en

$\lambda = \frac{1}{2}$. Donc le cosinus de l'angle \widehat{AMB} est minimal lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$.

Comme la fonction cosinus est décroissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, l'angle \widehat{AMB} est maximal lorsque son cosinus est minimal, c'est-à-dire lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$.

Or $\lambda = \frac{1}{2}$ lorsque M est le milieu de $[CD]$.

Par suite, **l'angle \widehat{AMB} est maximum lorsque M est le milieu du segment $[CD]$.**

d) On a : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right)} = 1 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Alors $\text{mes}\left(\widehat{AMB}_{\max}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

Par conséquent, **\widehat{AMB}_{\max} mesure environ $70,53^\circ$.**