

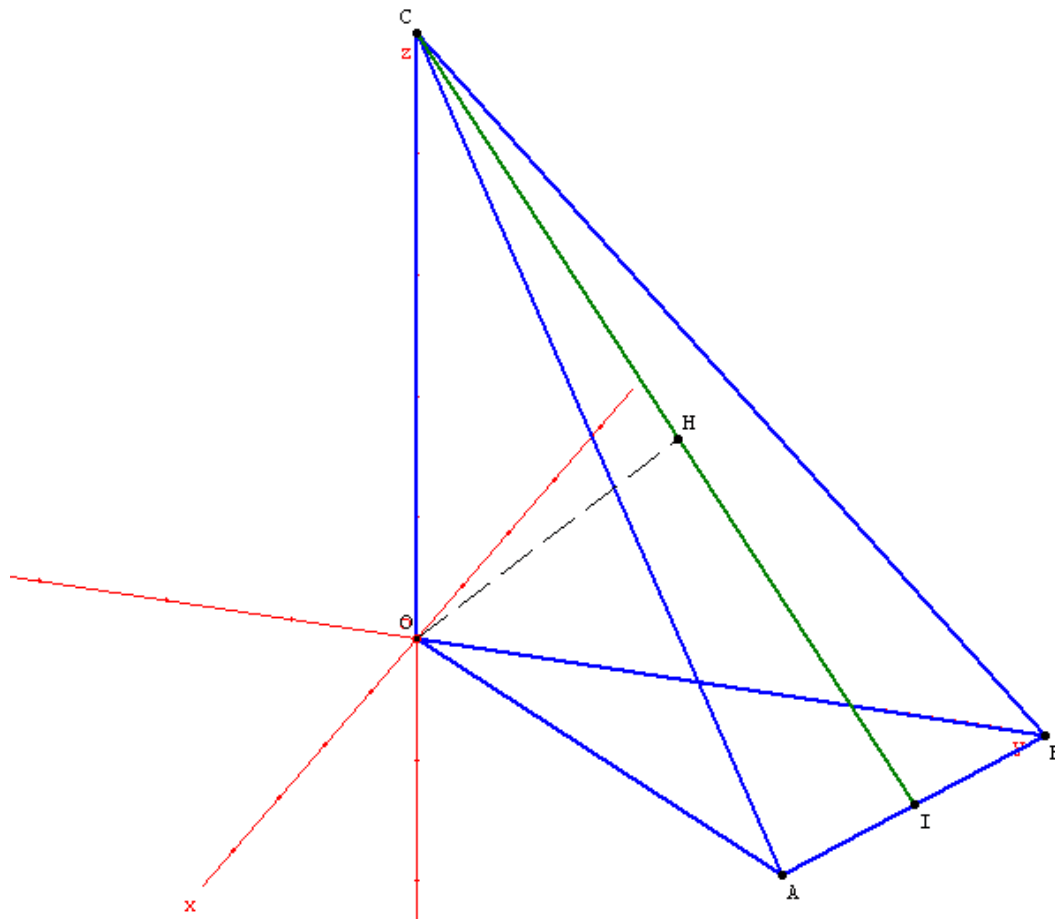
# CORRECTION DU DEVOIR MAISON N° 13

*Géométrie dans l'espace*

*Pour le 26 mars 2010*

*Centres Étrangers, juin 2009*

1)



2) •  $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 3 \times 0 + 4 \times 0 + 0 \times 5 = 0$  ; alors les vecteurs  $\overline{OA}$  et  $\overline{OC}$  sont orthogonaux.

De plus,  $OA = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$  et  $OC = \sqrt{0^2 + 0^2 + 5^2} = 5$ .

Par suite, **le triangle OAC est rectangle et isocèle en O.**

•  $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 0 \times 0 + 5 \times 0 + 0 \times 5 = 0$  ; alors les vecteurs  $\overline{OB}$  et  $\overline{OC}$  sont orthogonaux.

De plus,  $OB = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = 5$ .

Par suite, **le triangle OBC est rectangle et isocèle en O.**

•  $AB = \sqrt{(0-3)^2 + (5-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{10}$  ;  $AC = \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{50}$  et

$BC = \sqrt{(0)^2 + (0-5)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{50}$ . Par conséquent, **le triangle ABC est isocèle en C.**

3) a) Comme  $I$  est le milieu du segment  $[AB]$ , alors  $I$  a pour coordonnées  $\left(\frac{3}{2} ; \frac{9}{2} ; 0\right)$ .

On en déduit que  $\overline{HI}$  a pour coordonnées  $\left(\frac{27}{38} ; \frac{81}{38} ; -\frac{45}{19}\right)$  et que  $\overline{CI}$  a pour

coordonnées  $\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}; -5\right)$ .

$$\text{D'où : } \frac{x_{\overline{HI}}}{x_{\overline{CI}}} = \frac{27}{38} \times \frac{2}{3} = \frac{9}{19}; \frac{y_{\overline{HI}}}{y_{\overline{CI}}} = \frac{81}{38} \times \frac{2}{9} = \frac{9}{19} \text{ et } \frac{z_{\overline{HI}}}{z_{\overline{CI}}} = \left(-\frac{45}{19}\right) \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{9}{19}.$$

Par conséquent, les vecteurs  $\overline{HI}$  et  $\overline{CI}$  sont colinéaires.

Par suite, **les points H, C et I sont alignés.**

b)  $H$  est le projeté orthogonal de  $O$  sur le plan  $(ABC)$  si  $H$  appartient au plan  $(ABC)$  et si la droite  $(OH)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ .

• Comme la droite  $(IC)$  est incluse dans le plan  $(ABC)$  et que le point  $H$  appartient à la droite  $(IC)$  (d'après la question précédente), alors  $H$  appartient au plan  $(ABC)$ .

•  $\overline{OH} \cdot \overline{AC} = \frac{15}{19} \times (-3) + \frac{45}{19} \times (-4) + \frac{45}{19} \times 5 = -\frac{45}{19} - \frac{180}{19} + \frac{225}{19} = 0$ ; alors la droite  $(OH)$  est orthogonale à la droite  $(AC)$ .

$\overline{OH} \cdot \overline{AB} = \frac{15}{19} \times (0) + \frac{45}{19} \times (-5) + \frac{45}{19} \times 5 = 0 - \frac{180}{19} + \frac{180}{19} = 0$ ; alors la droite  $(OH)$  est orthogonale à la droite  $(AB)$ .

On en déduit que la droite  $(OH)$  est orthogonale à deux droites sécantes du plan  $(ABC)$ .

Par suite, la droite  $(OH)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ .

Par conséquent,  **$H$  est le projeté orthogonal de  $O$  sur le plan  $(ABC)$ .**

c) D'après la question précédente, on en déduit que  $\overline{OH}$  est un vecteur normal du plan  $(ABC)$ .

Une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  est de la forme  $\frac{15}{19}x + \frac{45}{19}y + \frac{45}{19}z + d = 0$ .

Or  $B$  appartient au plan  $(ABC)$ , alors  $0 + \frac{45}{19} \times 5 + 0 + d = 0$ , c'est-à-dire  $d = -\frac{225}{19}$ .

Alors **une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  est  $\frac{15}{19}x + \frac{45}{19}y + \frac{45}{19}z - \frac{225}{19} = 0$ , ou encore  $x + 3y + 3z - 15 = 0$ .**

4) a) • D'après la question 1), les triangles  $OAC$  et  $OBC$  sont isocèles en  $O$ ; alors  $OA = OC$

et  $OB = OC$ . D'où,  $OAB$  est isocèle en  $O$ .

De plus,  $I$  est le milieu de  $[AB]$ ; alors  $[OI]$  est la hauteur issue de  $O$  dans le triangle

$OAB$ . Donc l'aire du triangle  $OAB$  est égale à  $\frac{AB \times OI}{2}$ .

$$\text{Or } AB = \sqrt{10} \text{ et } OI = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + (0)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{81}{4}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Par conséquent, **l'aire du triangle  $OAB$  est égale à  $\frac{30}{4}$ , c'est-à-dire  $\frac{15}{2}$ .**

• D'après la question 1), les droites  $(OA)$  et  $(OB)$  sont perpendiculaires à la droite  $(OC)$ . Comme  $(OA)$  et  $(OB)$  sont deux droites sécantes du plan  $(OAB)$ , alors  $(OC)$  est orthogonale au plan  $(OAB)$ . On en déduit que  $[OC]$  est la hauteur du tétraèdre  $OABC$

relative au plan  $(OAB)$ . Donc le volume du tétraèdre  $OABC$  est égal à  $\frac{1}{3} \times \mathcal{A}(OAB) \times OC$ .

Par conséquent, **le volume du tétraèdre  $OABC$  est égal à  $\frac{1}{3} \times \frac{15}{2} \times 5$ , c'est-à-dire à  $\frac{25}{2}$ .**

b) Comme  $H$  est le projeté orthogonale de  $O$  sur  $(ABC)$ , alors  $OH$  est la distance du point

$O$  au plan  $(ABC)$ . Or  $OH = \sqrt{\left(\frac{15}{19}\right)^2 + \left(\frac{45}{19}\right)^2 + \left(\frac{45}{19}\right)^2} = \sqrt{\frac{4275}{19^2}} = \sqrt{\frac{15^2 \times 19}{19^2}} = \frac{15}{\sqrt{19}}$ .

Par conséquent, **la distance du point  $O$  au plan  $(ABC)$  est égale à  $\frac{15\sqrt{19}}{19}$ .**

c) Comme  $[OH]$  est la hauteur du tétraèdre  $OABC$  relative au plan  $(ABC)$ , alors le volume

du tétraèdre  $OABC$  est égal à  $\frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABC) \times OH$ . Ainsi  $\frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABC) \times OH = \frac{25}{2}$

D'où :  $\mathcal{A}(ABC) = \frac{25}{OH} \times 3 = \frac{75}{2} \times \frac{\sqrt{19}}{15} = \frac{5\sqrt{19}}{2}$ .