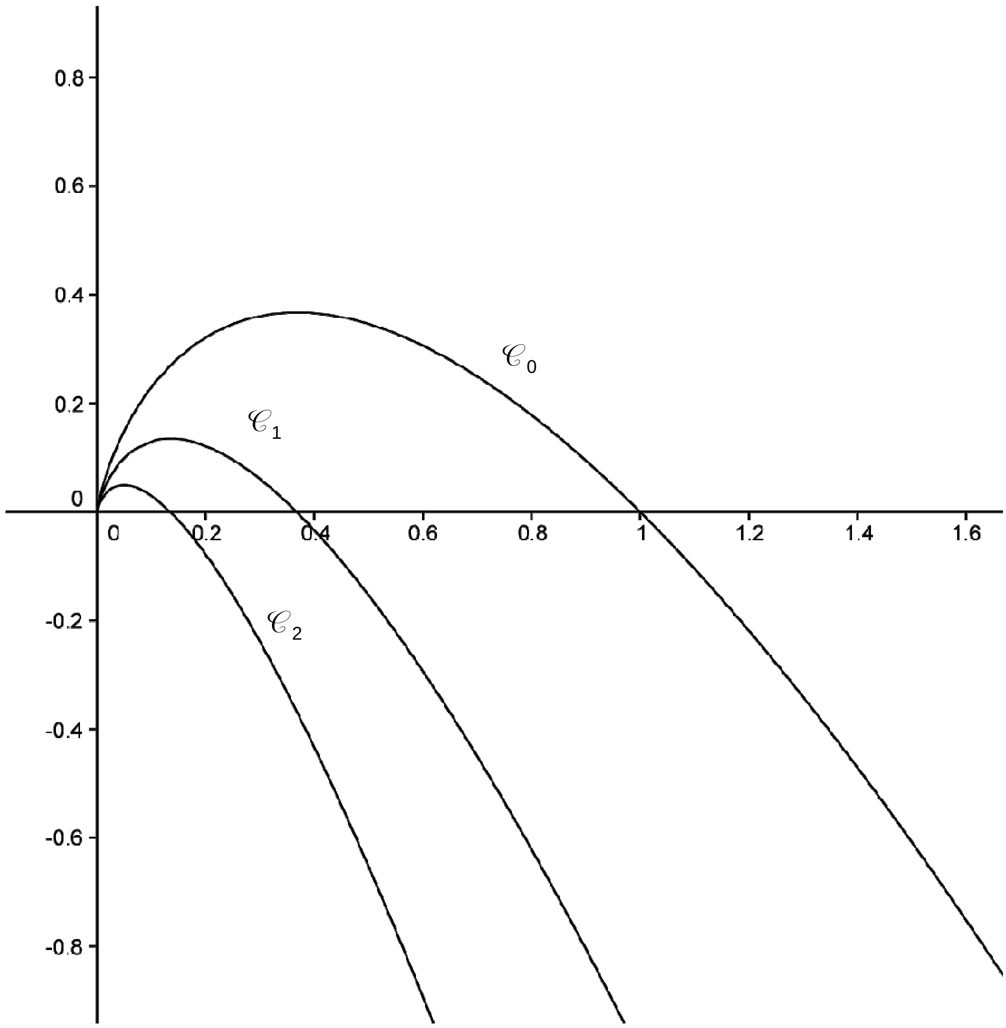
DEVOIR MAISON N° 14

Fonction logarithme népérien et intégration	**_Pour le 3 mai 2010_**

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :
$f_n(x) = -nx - x\ln x$.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n, dans un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\ \vec{j})$. Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives des fonctions f_0, f_1 et f_2 sont données ci-dessous.



On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_0(x) = -x\ln x$.

1) Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.

2) Étudier les variations de la fonction f_0 sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n , n entier naturel.

1) Démontrer que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f_n'(x) = -n - 1 - \ln x$ où f_n' désigne la fonction dérivée de f_n .

2) a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_n$ admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   b) Prouver que le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.
   c) Placer sur la figure les points A_0, A_1 et A_2 .

3) a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_n$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n , dont l'abscisse est e^{-n} .
   b) Démontrer que la tangente à $\mathscr{C}_n$ au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.
   c) Placer sur la figure les points B_0, B_1 et B_2 .

Partie C : Calculs d'aires.

Pour tout entier naturel n, on considère le domaine du plan $\mathscr{D}_n$ délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équation $x = \mathrm{e}^{-n-1}$ et $x = \mathrm{e}^{-n}$.
On note $\mathcal{I}_n$ l'aire en unités d'aires du domaine $\mathscr{D}_n$.

1) Hachurer sur la figure les domaines $\mathscr{D}_0$, $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

2) a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} x \ln(x)\,dx$.
   b) En déduire que $\mathcal{I}_0 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4\mathrm{e}^2}$.
   c) On admet que le domaine $\mathscr{D}_{n+1}$ est l'image du domaine $\mathscr{D}_n$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Exprimer $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ en fonction de $\mathcal{I}_0$.